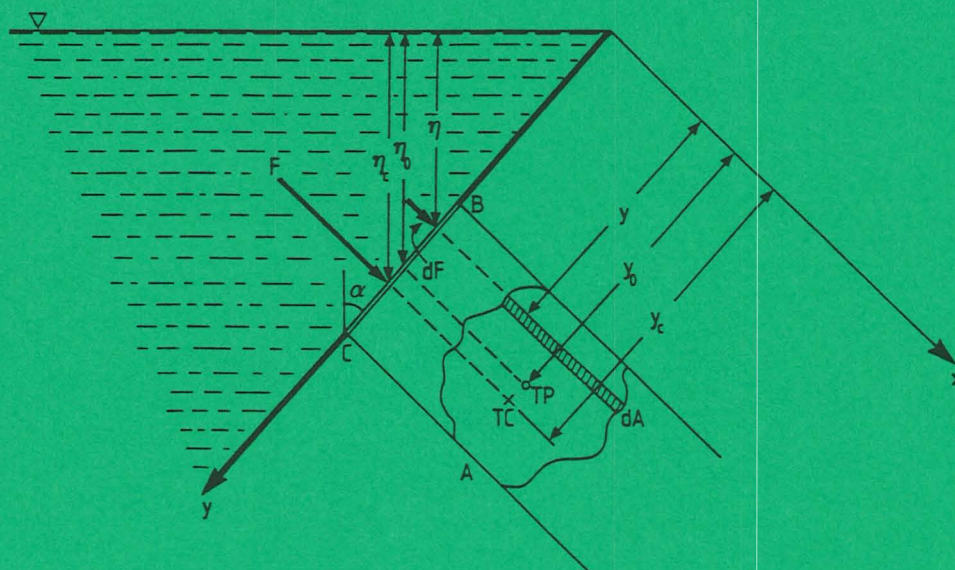




KOMPENDIUM I AGRONOMISK HYDROMEKANIK

2: HYDROSTATIK

John Sandsborg och Anders Bjerketorp



2:a upplagan

Institutionen för markvetenskap

Avdelningen för lantbrukets hydroteknik

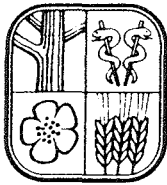
Avdelningsmeddelande 88:5

UPPSALA

1993

ISSN 0282-6569

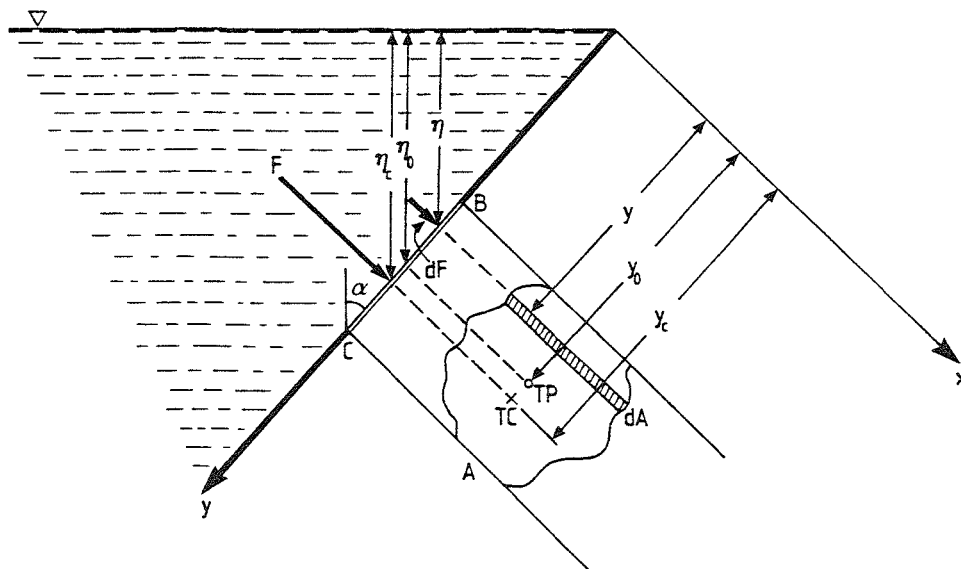
ISBN 91-576-3657-5



KOMPENDIUM I AGRONOMISK HYDROMEKANIK

2: HYDROSTATIK

John Sandsborg och Anders Bjerketorp



2:a upplagan

Institutionen för markvetenskap

Avdelningen för lantbrukets hydroteknik

Avdelningsmeddelande 88:5

UPPSALA

1993

ISSN 0282-6569

ISBN 91-576-3657-5

FÖRORD TILL 1:A UPPLAGAN

Sommaren 1985 förelåg ett omfattande, men för publicering ej färdigställt manuskript i 12 kapitel och 2 bilagor, betitlat "Kompendium i elementär hydromekanik" och författat av universitetslektor, agronomie doktor John Sandsborg. Från 1969 till 1984 hade Sandsborg handhaft undervisningen i hydromekanik för studerande vid Lantbrukshögskolan/Lantbruksvetenskapliga fakulteten och redan 1973 givit ut ett fylligt kompendium i ämnet. Hösten 1985 måste Sandsborg, på grund av en allvarlig sjukdom, i förtid upphöra med hydromekanikundervisningen. Denna övertogs av agronomie licentiat Anders Bjerketorp, vilken då sedan länge varit den vid avdelningen för lantbrukets hydroteknik som jämsides med Sandsborg ägnat speciellt intresse åt hydromekanik och åt hydromekaniska tillämpningar inom avdelningens verksamhetsfält, i den tradition som tidigare förvaltats av bl a Herman Flodkvist, Yngve Gustafsson och Sigvard Andersson. Sandsborg och Bjerketorp kom också överens om att tillsammans färdigställa manuskriptet för utgivning och Bjerketorp skred omgående till verket att granska och justera texten. Sedan Sandsborg i februari 1986 avlidit har Bjerketorp fortsatt arbetet med att redigera, korrigera och komplettera manuskriptet, så att de första delarna (sektionerna) nu efter tre år är redo för publicering. Den andra sektionen, "Hydrostatik", utgör en grundlig bearbetning och i någon mån en utvidgning av kapitel 2 i ovannämnda manuskript, var till fogats en översedd version av huvuddelen av ursprungstextens bilaga 2 (appendix B).

Viktiga, och med tacksamhet noterade, insatser har gjorts av den tidigare institutionssekreteraren Margit Zetterberg, som skrivit ut det ursprungliga manuskriptet på maskin, samt institutionssekreterare Maj-Britt Brodin, som med aldrig svikande flit, tålamod och fyndighet överfört den bearbetade och i många omgångar justerade versionen till ordbehandlingsdokument.

Uppsala i november 1988

Janne Eriksson
Professor

FÖRORD TILL 2:A UPPLAGAN

I denna nya upplaga har texten ytterligare genomsetts och kompletterats. Även figurmaterialet har granskats och, under förtjänstfull medverkan av ingenjör Hans Johansson, i betydande utsträckning justerats. Ett kort avsnitt om flytstabilitet har tillagts. Huvudtiteln har ändrats till "Kompendium i agronomisk hydromekanik".

Uppsala i augusti 1993

Anders Bjerketorp

INNEHÅLLSFÖRTECKNING

	Sid.
2. HYDROSTATIK	2:1
2.1. HYDROSTATIKENS GRUNDEKVATION	2:1
2.2. TRYCKETS VARIATION I FLUIDER	2:3
2.2.1. Tryckets variation i inkompressibla fluider	2:3
2.2.2. Tryckets variation i kompressibla fluider	2:6
2.2.3. Ekvipotentialeytor	2:8
2.3. ABSOLUTTRYCK OCH (HYDRO)STATISKT TRYCK	2:9
2.4. MANOMETRI	2:12
2.5. VÄTSKETRYCK MOT PLANA YTOR	2:16
2.5.1. Horisontella ytor	2:16
2.5.2. Lutande plana ytor	2:17
2.5.3. Tryckcentrum och dess läge på regelbundna ytor	2:19
2.5.4. Tryckcentrums läge på oregelbundna ytor	2:22
2.5.5. Några tillämpningsexempel rörande tryck mot plana ytor	2:23
2.6. VÄTSKETRYCK MOT BUKTIGA YTOR	2:30
2.7. DRAGPÅKÄNNINGAR ORSAKADE AV INRE TRYCK	2:34
2.7.1. Dragpåkänning i ett tunnväggigt rör	2:34
2.7.2. Dragpåkänning i ett tunt, sfäriskt skal	2:36
2.8. HYDROSTATISK LYFTKRAFT - ARKIMEDES PRINCIP	2:36
2.9. FLYTSTABILITET	2:41
2.10 FLUIDER UNDER ACCELERATION	2:45
2.10.1. Begreppet relativ jämvikt	2:45
2.10.2. Konstant linjär acceleration. Allmänt	2:45
2.10.3. Konstant acceleration rakt uppåt eller nedåt	2:50
2.10.4. Centripetal acceleration	2:51
2.11. OMNÄMND LITTERATUR	2:56
2.12. BIHANG 2.1: NÅGOT OM PLANA YTORS MOMENT M M	2:57
2.12.1. Moment och tyngdpunkter för plana ytor	2:57
2.12.2. Moment och tyngdpunkter för volymer och massor	2:68
2.12.3. Normalacceleration och tangentialacceleration	2:68
2.12.4. Rotationsrörelse	2:70
2.12.5. Tröghetsmoment	2:74

2. HYDROSTATIK

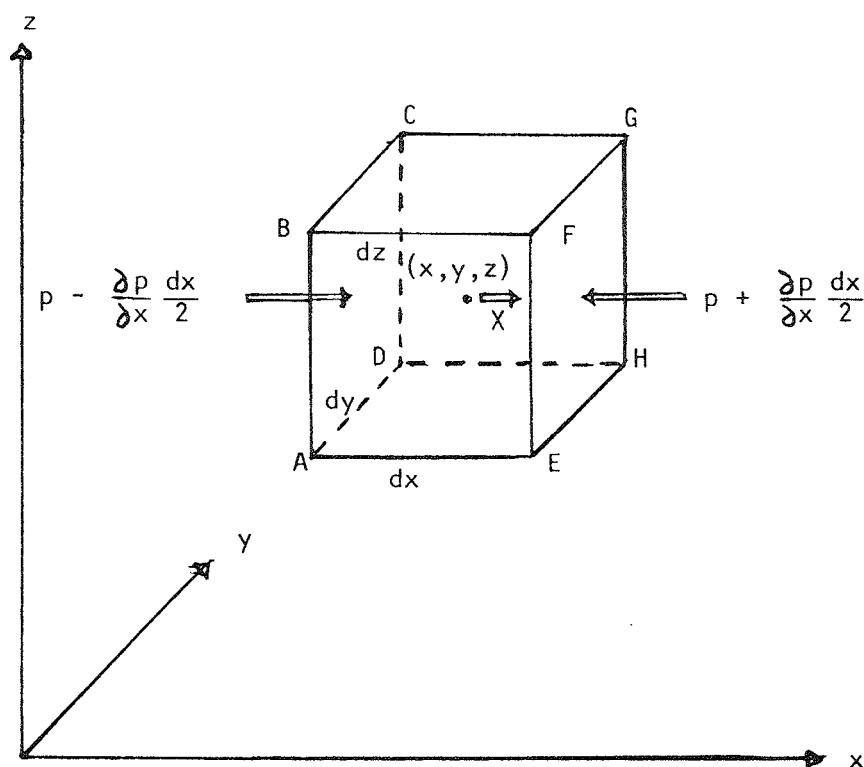
Ingen relativ rörelse antas föreligga mellan elementen i en fluid i vila. Förekommer ingen relativ rörelse och alltså ingen hastighetsgradient, så kan inte heller någon skjuvspänning uppträda, trots fluidens viskositet. Möjligheten att helt bortse från viskositeten vid behandling av hydrostatiska problem gör det relativt lätt att nå exakta analytiska lösningar.

2.1. HYDROSTATIKENS GRUNDEKVATION

De krafter, som verkar på ett fluidelement i vila består dels av masskrafter, dels av ytkrafter, dvs tryckkrafter.

På det differentiella, parallelepipediska elementet i figur 2.1 verkar per massenhet masskrafterna X , Y och Z i respektive x -, y - och z -riktningarna.

Med trycket p i elementets centrum $(x;y;z)$ blir tryckkraften per ytenhet uttryckt med hjälp av partiella derivator



Figur 2.1

$$\text{på sidan } ABCD \quad p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \quad \text{på sidan } EFGH \quad p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}$$

$$\text{på sidan } ABFE \quad p - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{2} \quad \text{på sidan } DCGH \quad p + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{2}$$

$$\text{på sidan } ADHE \quad p - \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{2} \quad \text{på sidan } BCGF \quad p + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{2}$$

Jämvikt i x-riktningen råder om

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) \cdot dy \cdot dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) \cdot dy \cdot dz + \rho \cdot X \cdot dx \cdot dy \cdot dz = 0$$

Hyfsning av detta uttryck ger

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho X \quad 2.1$$

På samma sätt fås för y-riktningen

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho Y \quad 2.2$$

och för z-riktningen

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho Z \quad 2.3$$

Ekvationerna 2.1 - 2.3 visar att tryckgradienterna längs axlarna är direkt proportionella mot fluidens densitet och de längs respektive axlarna verkande masskrafterna.

Dessa ekvationer brukar kallas Eulers allmänna jämviktsekvationer. De uppställdes i mitten av 1700-talet (Euler, 1755) av den schweiziske matematikern Leonhard Euler (1707-1783).

Trycket i punkten (x;y;z) är p. Man kan också säga att trycket, p, är en funktion av läget i rummet, dvs av x-, y- och z-koordinaterna. Alltså

$$p = p(x, y, z) \quad 2.4$$

Den fullständiga differentialen av funktionen

$$p = p(x, y, z) \text{ skrives}$$

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \quad 2.5$$

Multiplikeras ekvation 2.1 med dx , ekvation 2.2 med dy och ekvation 2.3 med dz samt adderas led för led fås

$$\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = \rho \cdot X \cdot dx + \rho \cdot Y \cdot dy + \rho \cdot Z \cdot dz$$

och

$$dp = \rho \cdot X \cdot dx + \rho \cdot Y \cdot dy + \rho \cdot Z \cdot dz \quad 2.6$$

Detta uttryck är hydrostatikens grundekvation i sin allmänna form.

För en fluid i vila, vilken endast är utsatt för tyngdkraftens inverkan, är i ekvation 2.6 per massenhet

$$X = 0; \quad Y = 0 \quad \text{och} \quad Z = -g$$

Insättes dessa värden i grundekvationen erhålles

$$dp = -\rho \cdot g \cdot dz \quad 2.7$$

Denna differentialekvation anger tryckförändringens beroende av tyngdensiteten och av höjden över en referensnivå. Ekvationen gäller för både sammantryckbara (kompressibla) och icke sammantryckbara (inkompressibla) fluider.

2.2. TRYCKETS VARIATION I FLUIDER

2.2.1. Tryckets variation i inkompressibla fluider

Ekvation 2.7 kan skrivas

$$dz = -\frac{1}{\rho \cdot g} dp$$

Integreras detta differentialuttryck mellan nivåerna z_1 och z_2 , med de korresponderande trycken p_1 respektive p_2 , fås

$$z_2 - z_1 = \int_{p_2}^{p_1} \frac{dp}{\rho \cdot g} \quad 2.8$$

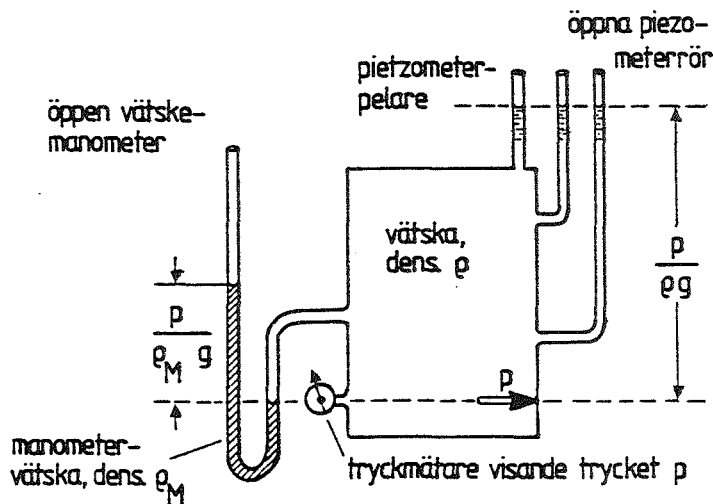
För en fluid med konstant densitet (något som antas föreligga för gaser över små och för vätskor över betydande vertikala avstånd) ger den genomförda integreringen av ekvation 2.8:

$$z_2 - z_1 = \frac{p_1 - p_2}{\rho \cdot g}$$

eller

$$p_1 - p_2 = \rho \cdot g \cdot (z_2 - z_1) = \rho \cdot g \cdot h \quad 2.9$$

Ekvation 2.9 visar att tryckdifferensen, $(p_1 - p_2)$, motsvaras av en tryckhöjd, h , åstadkommen av en fluid med tyngddensiteten $\rho \cdot g$. Ofta anges trycket med en mot detta svarande vätskepelarhöjd, t ex millimeter kvicksilver (mm Hg), meter vattenpelare (m vp) etc. Sambandet mellan tryck (p) och tryckhöjd (h) illustreras av den öppna manometern och de likaledes öppna piezometerrörren i figur 2.2



Figur 2.2

Ekvation 2.9 kan efter dividering med $\rho \cdot g$ och omgruppering ges formen

$$\frac{p_1}{\rho \cdot g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho \cdot g} + z_2 = \text{konstant} \quad 2.10$$

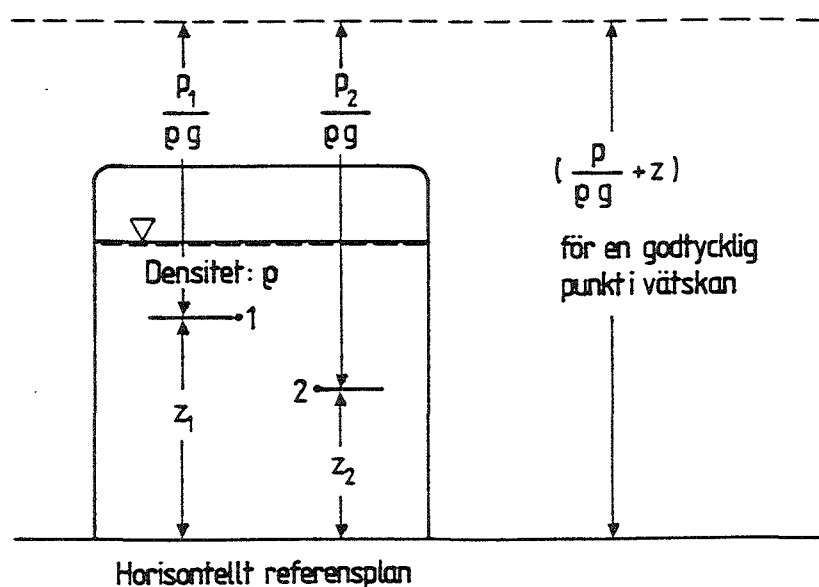
användbar för jämförelser med ekvationer för fluidströmning. Tas två godtyckligt valda punkter, 1 och 2 respektive, framgår det av ekvation 2.10 att summan $p/(\rho \cdot g) + z$ är densamma för alla punkter i fluiden. Detta kan åskådliggöras geometriskt (fig. 2.3).

I praktiken är ofta en vätskeyta exponerad för aerosfärstrycket (atmosfärstrycket. Om detta sättes till noll, kommer den streckade linjen i figur 2.3 att sammanfalla med vätskeytan.

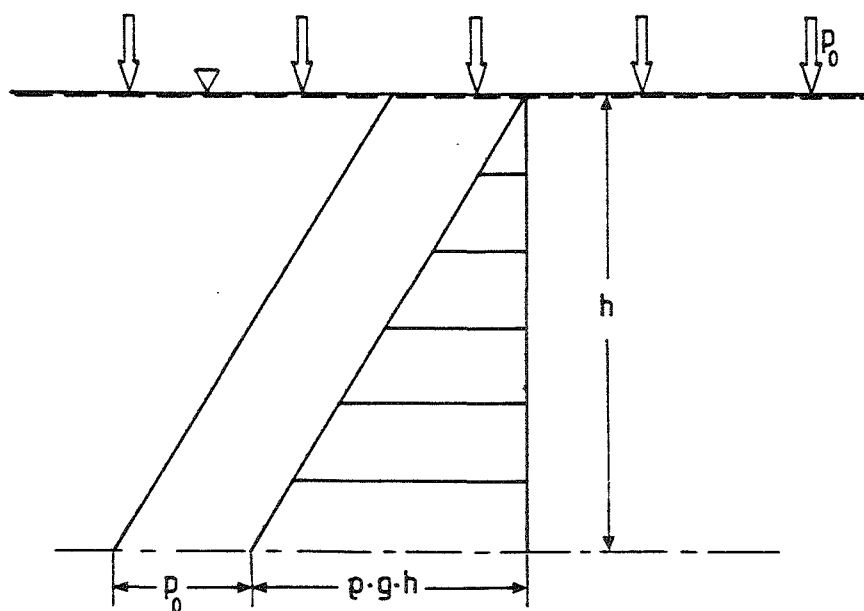
Ekvation 2.9 skrives vanligen under formen

$$p = p_{\text{abs}} = p_0 + \rho \cdot g \cdot h \quad 2.11$$

där p_0 är lika med aerosfärstrycket och h räknas vertikalt nedåt ($h = -z$) från en fri vätskeyta (fig. 2.4).



Figur 2.3



Figur 2.4

Hydrostatiska trycket räknas vanligen som övertryck i förhållande till aerosfärstrycket (atmosfärstrycket), dvs om p_0 står för aerosfärstrycket, så är $p - p_0 = \rho \cdot g \cdot h$ det hydrostatiska trycket. Alltså:

$$p - p_0 = p_{\text{övertryck}} = p_e = \rho \cdot g \cdot h$$

2.12

Ekvationen som ger uttryck för den s k hydrostatiska paradoxen, formulerades av den franske matematikern och filosofen Blaise Pascal (1623-1662). Den hydrostatiska paradoxen, även kallad Pascals princip, säger att bottentrycket i ett kärl endast är beroende av fria vätskeytans höjd över botten, ej av vätskans kvantitet eller kärlets form (Pascal, 1658).

Illustrativt exempel 2.1

Ett 4,00 m högt undervattenslaboratorium skall kunna sänkas ned 100,0 m, mätt från havsytan till laboratoriets översida. Sök hydrostatiska trycket på laboratoriets översida och tryckets variation längs en av dess vertikala sidor efter nedsänkningen, om relativa densiteten hos saltvattnet är 1,025 och accelerationen vid fritt fall, g , sättes till $9,81 \text{ m/s}^2$.

Lösning: Vi har att

$$s = \frac{\rho_{\text{saltvatten}}}{\rho_{\text{vatten(normal)}}} = \frac{\rho_{\text{saltvatten}}}{1000} = 1,025;$$

$$\rho_{\text{saltvatten}} = 1025 \text{ kg/m}^3$$

Vi har också att

$$\gamma = \rho \cdot g = 1025 \times 9,81 = 10055 \text{ N/m}^3 = 10,06 \text{ kN/m}^3$$

Trycket på laboratoriets översida blir då $p_e = \gamma \cdot h$

$$p_e = 10,06 \times 100 = 1006 \text{ kPa}$$

Tryckets variation längs en vertikal sida kan skrivas

$$p_e = 10,06 \cdot (100 + z) \text{ kPa}$$

om z mätes från laboratoriets överkant och nedåt.

2.2.2. Tryckets variation i kompressibla fluider

Enligt ekvation 1.3 i Sandsborg & Bjerketorp (1993) har vi att

$$\gamma = \rho \cdot g = \frac{g \cdot p}{R_i T}$$

eller

$$\rho = \frac{p}{R_i T}$$

där R_i står för den individuella gaskonstanten och T för den termodynamiska temperaturen. Är fluiden en ideal gas i vila vid konstant temperatur (isotermi) kan vi för två situationer med trycket p och densiteten ρ respektive trycket p_0 (förväxla inte detta p_0 med beteckningen för aerosfärs-tryck) och densiteten ρ_0 skriva

$$\rho = \frac{p}{R_i T} \quad \text{och} \quad \rho_0 = \frac{p_0}{R_i T}$$

som ger

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0} \quad \text{eller} \quad \rho = \frac{p \cdot \rho_0}{p_0} \quad 2.14$$

Ekvation 2.7 kan omformas till

$$dz = - \frac{1}{g \cdot \rho} dp \quad 2.15$$

En sammanställning av ekvationerna 2.14 och 2.15 ger

$$dz = - \frac{p_0}{g \cdot \rho_0} \frac{dp}{p} \quad 2.16$$

Om $p = p_0$ när $\rho = \rho_0$ ger integrering av ekvation 2.16 mellan gränserna z_0 och z respektive p_0 och p att

$$\int_{z_0}^z dz = - \frac{p_0}{g \cdot \rho_0} \int_{p_0}^p \frac{dp}{p}$$

dvs

$$z - z_0 = - \frac{p_0}{g \cdot \rho_0} \ln \frac{p}{p_0} \quad 2.17$$

där \ln betecknar den naturliga logaritmen. Då blir

$$p_{\text{abs}} = p_0 \cdot \exp\left(- \frac{z - z_0}{p_0 / (g \cdot \rho_0)}\right) = p_0 \cdot \exp(- g \cdot (z - z_0) \rho_0 / p_0) \quad 2.18$$

vilket är ekvationen för absoluta tryckets variation med höjden i en gas när isoterma förhållanden råder.

Ofta antas aerosfären (jordens lufthölje) ha en konstant temperaturgradient

$$T = T_0 + \beta \cdot Z \quad 2.19$$

för standardatmosfären gäller $\beta = - 0,0065^\circ \text{ C/m}$ upp till stratosfären.

Densiteten kan uttryckas i termer av tryck och temperatur med hjälp av ekvation 2.13

$$\rho = \frac{p}{R_1 T} = \frac{p}{R_1 (T_0 + \beta \cdot Z)} \quad 2.20$$

Substitution i $dp = -\rho \cdot g \cdot dz$ (ekvation 2.7 på s. 2:3) ger möjlighet till separering av variablerna och till att genom integrering erhålla p i termer av z .

Illustrativt exempel 2.2

Beräkna, under antagandet att isoterma förhållanden råder i aerosfären, lufttryck och densitet på en höjd av 1500,0 m, om lufttrycket vid havsytan är 1020,0 mb absolut och luftens densitet där kan sättas till 1,290 kg/m³. Sätt accelerationen vid fritt fall, g , till 9,807 m/s².

Lösning: Från ekvation 2.18 har vi att

$$p_{abs} = 102000 \cdot \exp\left(-9,807 \times 1500 \times 1,290/102000\right) \approx 84684 \text{ Pa}$$

Från ekvation 2.14 fås

$$\rho = \frac{p_{abs} \cdot \rho_0}{p_0} = \frac{84684 \times 1,290}{102000} = 1,071 \text{ kg/m}^3$$

2.2.3. Ekvipotentialytor

Ytor, för vilka gäller att p i ekvation 2.9 har ett konstant värde, kallas ekvipotentialytor eller nivåytor. Ekvipotentialytan kommer att i varje punkt vara vinkelrät mot den i punkten resulterande masskraften. Är lufttrycket konstant längs en vätskeyta blir denna en ekvipotentialyta (nivåyta). För en ekvipotentialyta har vi då att vänstra ledet i ekvation 2.6 (s. 2:3) är noll ($dp = 0$). Vi får

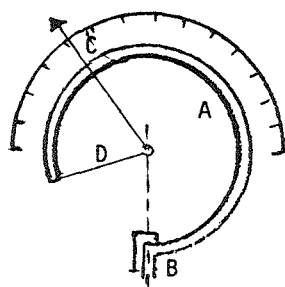
$$X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz = 0 \quad 2.21$$

Uttrycket 2.21 går tillbaka till den nederländske matematikern, astronomen och fysikern Christiaan Huygens (Huygens, 1728). Dess innebörd precisades av den franske matematikern och filosofen Jean la Rond d'Alembert (d'Alembert, 1752). Huygens levde mellan 1629 och 1695 och d'Alembert från 1717 till 1783.

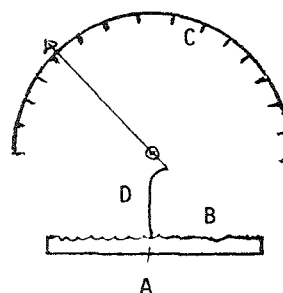
2.3. ABSOLUTTRYCK OCH (HYDRO)STATISKT TRYCK

Tryck kan hänföras till godtyckligt valda referensnivåer. De vanligaste är lokalt aerosfärstryck (atmosfärstryck) och trycket vid absolut vakuum. Om ett tryck anges som en differens mellan uppmätt värde och det lokala aerosfärstrycket kallas det ett (hydro)statiskt tryck. Är det däremot uttryckt som en skillnad mellan uppmätt värde och trycket vid fullständigt vakuum benämnes det absolut tryck.

Bourdonröret och aneroidbarometern (visade schematiskt i fig. 2.5) är standardinstrument för mätning av (hydro)statiskt tryck respektive absolut tryck.



(a) Bourdonröret



(b) Aneroidbarometern

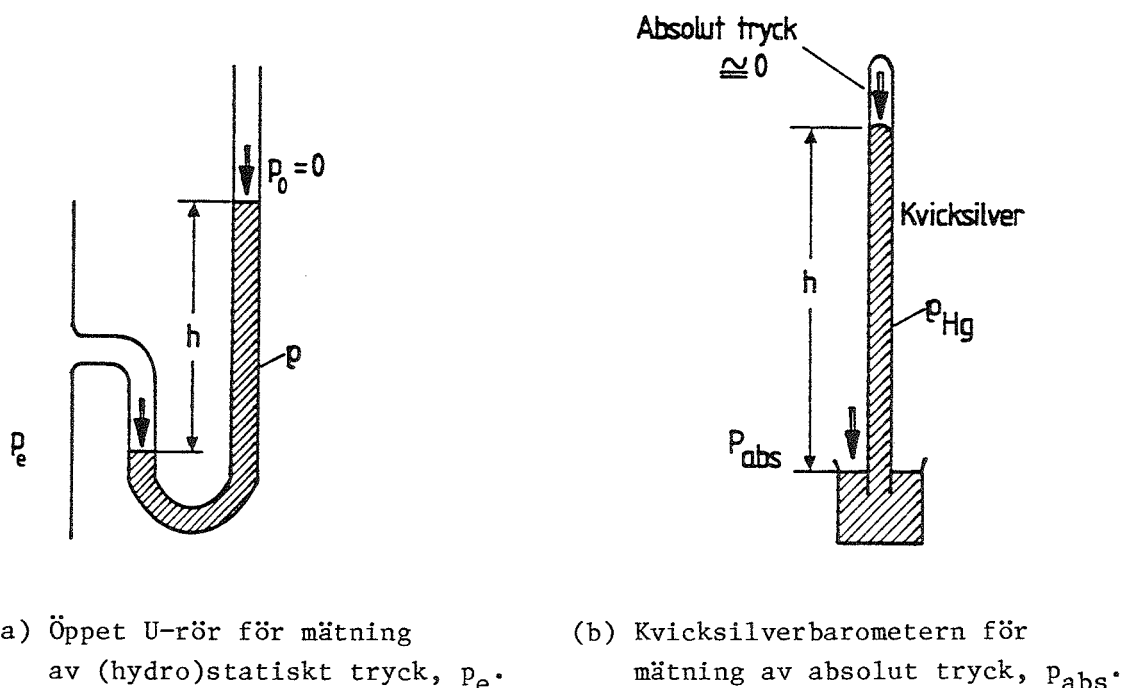
Figur 2.5

I bourdonröret (Bourdons tryckmätare) (fig. 2.5a) är ett böjt rör (A) med elliptiskt tvärsnitt fastsatt vid B, medan dess fria ända är förbunden med en visare (C) via en arm (D). Om det inre trycket ökas i röret tenderar detta att rätas ut, med påföljd att visaren rör sig åt höger. Är tryckmätaren rätt inställd skall visaren peka på skalans nollpunkt, när trycken utanför och innanför röret är lika. Bourdonröret är konstruerat för mätning av tryck relativt trycket hos den lokala aerosfär (atmosfär) som omger röret, dvs för mätning av (hydro)statiskt tryck.

Bourdonröret är uppkallat efter sin konstruktör, den franske instrumentmakaren Eugène Bourdon (1808 - 1884).

Aneroidbarometern är konstruerad för mätning av absolut tryck. Anordningen i figur 2.5b består huvudsakligen av en kort cylinder (A) där ena ändan är täckt av en elastisk hinna (B). Luften i cylindern är delvis evakuerad och en böjlig metallfjäder (D) hindrar cylindern från att pressas samman av lufttrycket. Tryck som pålägges på utsidan av hinnan åstadkommer att denna buktar sig inåt. Denna rörelse, som kan överföras till en passande skala (C) genom metallfjädern (D), blir ett direkt mått på det pålagda trycket. Genom jämförelse med avläsningar på en kvicksilverbarometer (fig. 2.6b) - reducerade till 0 °C och "normaltyngd" - kan aneroidbarometern kalibreras och därefter användas för mätningar av absoluttryck.

Aneroidbarometerns utslag är direkt beroende av det verkliga lufttrycket och behöver icke reduceras till "normaltyngd". I princip kan aneroidbarometern jämföras med en fjädervåg; kvicksilverbarometern däremot med en balansvåg.



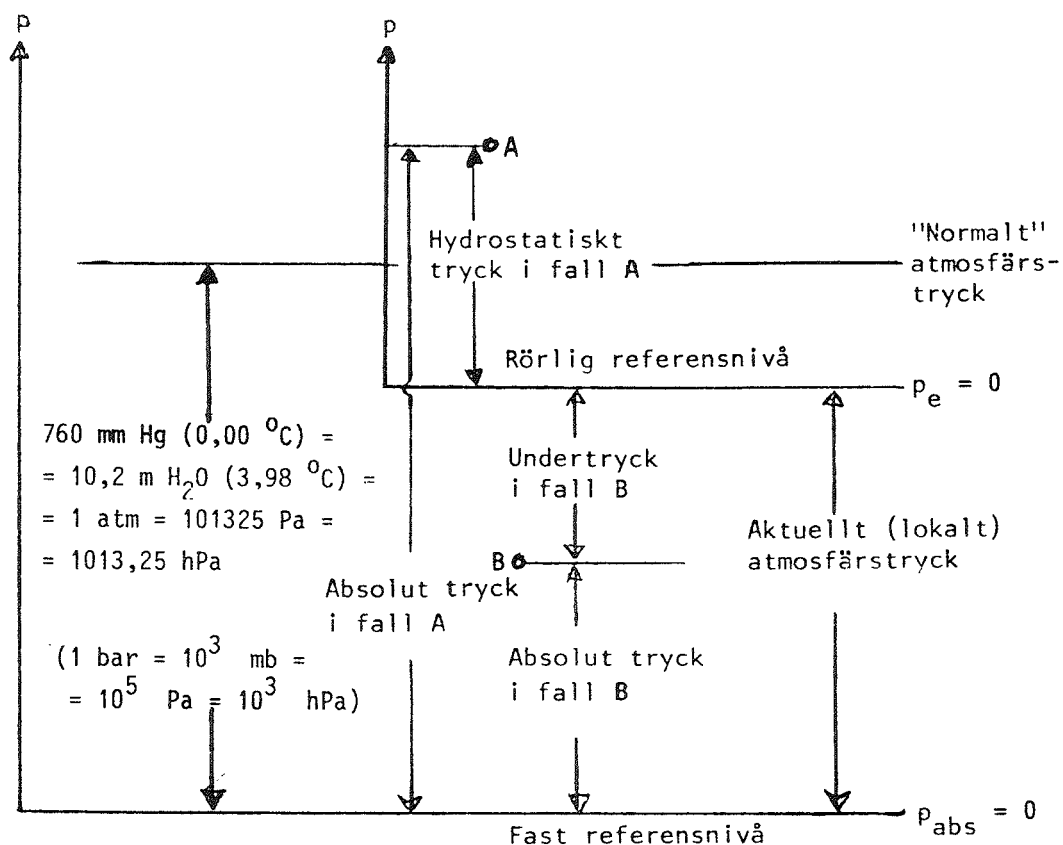
Figur 2.6

Vätskeanordningar för mätning av (hydro)statiskt tryck och av absolut tryck visas schematiskt i figur 2.6. I det öppna U-röret i figur 2.6a verkar atmosfärstrycket, p_0 , på den övre fria vätskeytan. Sättes $p_0 = 0$ kommer det pålagda trycket, p , att bli lika med $\rho \cdot g \cdot h$, om ρ betecknar vätskans densitet. Således kommer h att bli ett direkt mått på det (hydro)statiska trycket.

Kviksilverbarometern (fig. 2.6b) har ett lufttomt rum ovanför kvicksilverpelaren. Man kan bortse från det lilla tryck, som kvicksilverångan åstadkommer där (0,00017 kPa vid 15,6 °C) och sätta trycket ovanför kvicksilverytan i röret till noll. Vi får då att $p_{abs} = \rho_{Hg} \cdot g \cdot h$, och h är således här ett direkt mått på det absoluta trycket.

I figur 2.7 åskådliggöres sambanden mellan absolut, atmosfäriskt och (hydro)statiskt tryck och undertryck för två fall A och B. I diagrammet är också standardlufttrycket ("normallufttrycket") inlagt. Vi kan skriva

$$\text{Absolut tryck} = \text{Aktuellt atmosfärstryck} \begin{cases} - \text{undertryck ("vakuumgrad")} \\ + \text{(hydro)statiskt tryck} \end{cases} \quad 2.22$$



Figur 2.7

Illustrativt exempel 2.3

Ett bourdonrör registrerar ett undertryck (en "vakuumgrad") av 303 mm Hg när atmosfärstrycket är 998 hPa. Beräkna motsvarande absoluta tryck i hPa.

Lösning: Vi har att

$$760 \text{ mm Hg} = 101325 \text{ Pa} = 1013,25 \text{ hPa}$$

För 303 mm Hg kan vi skriva

$$\begin{array}{rcl} 760 \text{ mm Hg} & 1013,25 \text{ hPa} \\ 303 \text{ mm Hg} & x \text{ hPa} \end{array}$$

$$760x = 303 \cdot 1013,25$$

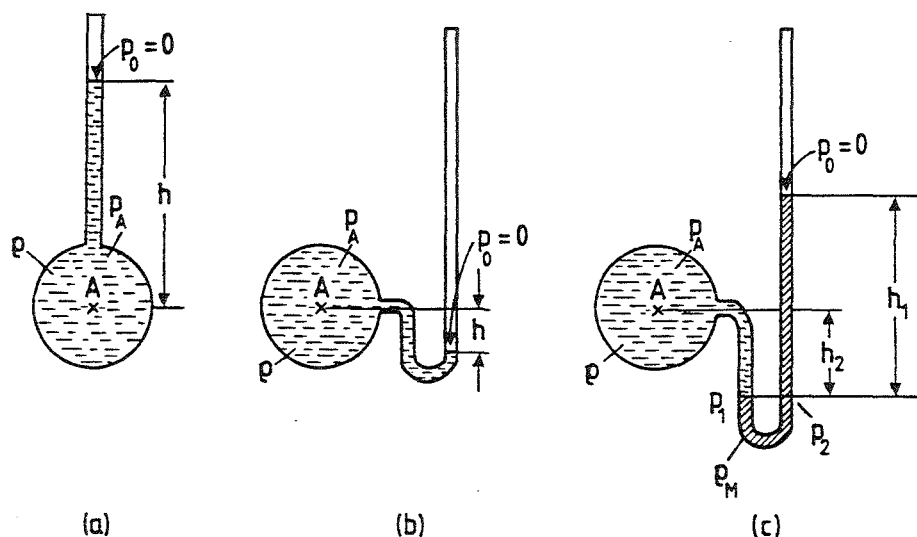
$$x = \frac{303 \cdot 1013,25}{760} = 404,0 \text{ hPa}$$

och slutligen

$$\underline{\text{Absolut tryck} = 998 - 404 = 594 \text{ hPa}}$$

2.4. MANOMETRI

Manometrar är anordningar i vilka vätskepelare användes för bestämning av tryckskillnader.



Figur 2.8.

En skiss av den enklaste manometern, vanligen kallad piezometerrör, visas i figur 2.8a. Piezometerröret kan registrera trycket i en vätska, om detta är större än atmosfärstrycket. Det är tydligt att anordningen ej kan användas vid undertryck, eftersom luften ju då skulle strömma in i behållaren genom röret. Piezometerröret är opraktiskt att använda vid mätningar av stora tryck, eftersom det vertikala röret skulle behöva göras mycket långt. Betecknas vätskans densitet ρ kan trycket vid A skrivas $p_A = \rho \cdot g \cdot h$.

För mätningar av små negativa eller positiva (hydro)statiska tryck i en vätska kan anordningen i figur 2.8b lämpligen användas. Med detta arrangemang kommer den fria, mer eller mindre välvda, vätskeytan (menisken) att befinna sig nedanför A. Eftersom trycket vid menisken lämpligen sättes till noll och eftersom trycket minskar med höjden, har vi att $p_A = -\rho \cdot g \cdot h$.

För mätning av större negativa eller positiva tryck är en anordning liknande den i figur 2.8c användbar. För att nedbringa längden på röret införes i rörkröken ytterligare en fluid. Denna bör ha avsevärt större densitet än den ursprungliga fluiden och ha egenskapen att ej blanda sig med denna. Den ursprungliga fluiden kan här vara en gas.

Eftersom trycken är lika stora i horisontella plan inom kontinuerliga pelare av samma fluid är det tydligt att $p_1 = p_2$. Från ekvation 2.11 fås att

$$p_1 = p_A + \rho \cdot g \cdot h_2 \quad \text{och} \quad p_2 = 0 + \rho_M \cdot g \cdot h_1$$

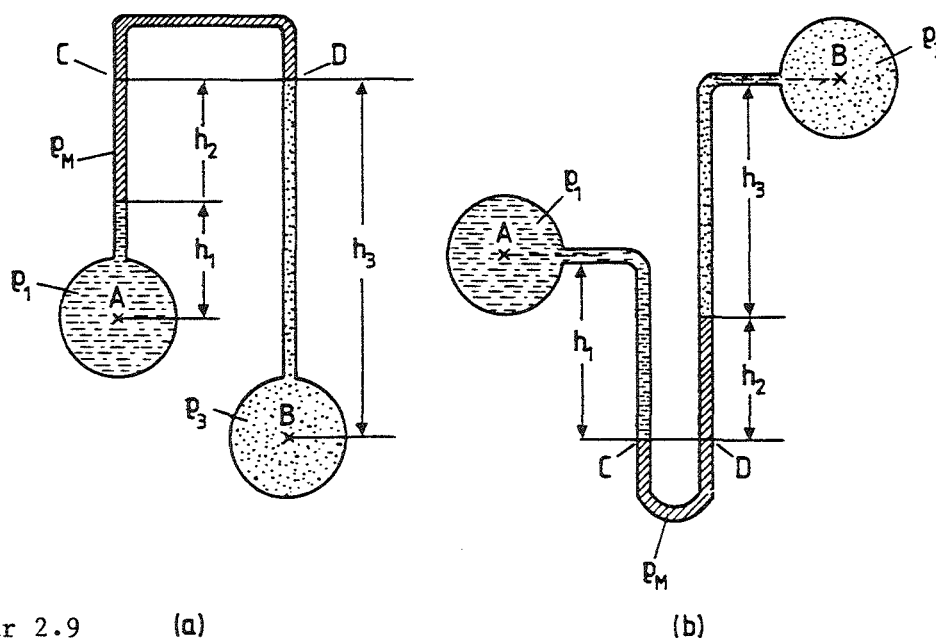
eller

$$p_1 = p_2 \equiv p_A + \rho \cdot g \cdot h_2 = \rho_M \cdot g \cdot h_1$$

dvs

$$p_A = \rho_M \cdot g \cdot h_1 - \rho \cdot g \cdot h_2$$

U-rörsmanometrar används ofta för att mäta skillnaden mellan två okända tryck, p_A och p_B (fig. 2.9).



Figur 2.9 (a)

(b)

Enligt de förutsättningar som beskrivs i figur 2.9a har vi att trycket (p_C) vid C är lika med trycket (p_D) vid D. Vi kan skriva

$$p_C = p_A - \rho_1 \cdot g \cdot h_1 - \rho_M \cdot g \cdot h_2 \quad \underline{\text{och}} \quad p_D = p_B - \rho_3 \cdot g \cdot h_3$$

och

$$p_C = p_D \equiv p_A - \rho_1 \cdot g \cdot h_1 - \rho_M \cdot g \cdot h_2 = p_B - \rho_3 \cdot g \cdot h_3$$

eller

$$p_A - p_B = \rho_1 \cdot g \cdot h_1 + \rho_M \cdot g \cdot h_2 - \rho_3 \cdot g \cdot h_3$$

På samma sätt fås i anslutning till figur 2.9b:

$$p_C = p_A + \rho_1 \cdot g \cdot h_1 \quad \underline{\text{och}} \quad p_D = p_B + \rho_3 \cdot g \cdot h_3 + \rho_M \cdot g \cdot h_2$$

och eftersom trycket vid C är lika med trycket vid D

$$p_C = p_D \equiv p_A + \rho_1 \cdot g \cdot h_1 = p_B + \rho_3 \cdot g \cdot h_3 + \rho_M \cdot g \cdot h_2$$

eller

$$p_A - p_B = -\rho_1 \cdot g \cdot h_1 + \rho_M \cdot g \cdot h_2 + \rho_3 \cdot g \cdot h_3$$

Illustrativt exempel 2.4

Vätskan vid A och B i figur 2.7a är vatten ($\rho_{\text{vatten}} = 999 \text{ kg/m}^3$). Manometervätskan är en olja ($\rho_{\text{olja}} = 806 \text{ kg/m}^3$). Beträffande h-värdena i figuren gäller: $h_1 = 0,300 \text{ m}$; $h_2 = 0,200 \text{ m}$; $h_3 = 0,600 \text{ m}$.

- (a): Bestäm tryckdifferensen $p_A - p_B$ i pascal.
 (b): Beräkna vilket tryck i meter vattenpelare absolut (m vp abs) som råder vid A, om trycket (p_B) vid B är $5,00 \text{ kp/cm}^2$ och barometerståndet är 735 mm Hg ($\rho_{\text{Hg}} = 13600 \text{ kg/m}^3$).

Lösning:

- (a): Trycken p_C respektive p_D vid C och D är:

$$p_C = p_A - \rho_{\text{vatten}} \cdot g \cdot h_1 - \rho_{\text{olja}} \cdot g \cdot h_2 = g \cdot (\rho_{\text{vatten}} \cdot h_1 + \rho_{\text{olja}} \cdot h_2)$$

$$p_D = p_B - \rho_{\text{vatten}} \cdot g \cdot h_3$$

Eftersom trycket vid C är lika stort som trycket vid D erhålles

$$p_C = p_D \equiv p_A - g \cdot (\rho_{\text{vatten}} \cdot h_1 + \rho_{\text{olja}} \cdot h_2) = p_B - \rho_{\text{vatten}} \cdot g \cdot h_3,$$

varav följer att

$$p_A - p_B = g \cdot (\rho_{\text{vatten}} \cdot (h_1 - h_3) + \rho_{\text{olja}} \cdot h_2)$$

eller numeriskt

$$p_A - p_B = 9,82 \times (999 \times (0,3 - 0,6) + 806 \times 0,2) \approx -1360 \text{ Pa}$$

- (b): Vi har att

$$p_B = \rho \cdot g \cdot h_B \quad \text{eller} \quad h_B = \frac{p_B}{\rho g} \quad \text{m vp}$$

$$p_B = 5,00 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} = 5,00 \times 9,82 \times 10000 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$h_B = \frac{5,00 \times 9,82 \times 10000}{999 \times 9,82} = 50,05 \text{ m vp}$$

$$\text{Barom.st. } 735 \text{ mm Hg} = 13600 \times 9,82 \times 0,735 \text{ N/m}^2 \quad (\text{Pa})$$

$$999 \times 9,82 \times h_{\text{vatten}} = 13600 \times 9,82 \times 0,735$$

$$\text{Barom.st. i } h_{\text{vatten}} = 10,01 \text{ m vp}$$

Då fås

$$h_B \text{ m vp abs} = 50,05 + 10,01 = 60,06 \text{ m vp abs}$$

Från (a) har vi att

$$p_A - p_B = -1360 \text{ Pa} = - \frac{1360}{999 \times 9,82} = -0,14 \text{ m vp}$$

Av detta följer att

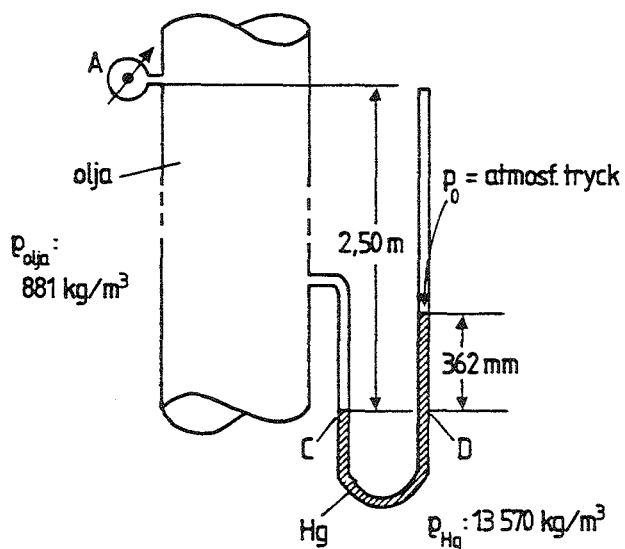
$$p_A - 60,06 = -0,14$$

eller

$$\underline{p_A = 59,92 \text{ m vp abs}}$$

Illustrativt exempel 2.5

Till en vertikal rörledning (se nedanstående figur), som innehåller olja, är ansluten en kvicksilvermanometer. Hur stort är det hydrostatiska trycket vid A, om ingen strömning sker i ledningen?



Lösning: Trycket vid C = Trycket vid D. Vi får

$$p_C = p_A + 881 \times 9,82 \times 2,50 \quad \text{och} \quad p_D = p_0 + 13570 \times 9,82 \times 0,362$$

p_0 sättes till 0

$$p_C = p_D \equiv p_A + 21628,6 = 0 + 48239,2$$

$$p_A = 48239,2 - 21628,6 = 26610,6$$

$$\underline{p_A = 26611 \text{ Pa} \approx 26,6 \text{ kPa}}$$

2.5. VÄTSKETRYCK MOT PLANA YTOR

De krafter som i en vätska verkar på en bestämd yta, kan ersättas av en resultantkraft. Storleken av resultantkraften, liksom läget (tryckcentrum) av dennas angreppspunkt, bestämmas antingen genom härledd formel eller genom integrering.

2.5.1. Horisontella ytor

En plan yta, horisontellt placerad i en vätska i vila, är utsatt för ett konstant tryck. Storleken av den kraft, som verkar på en sida av ytan fås ur relationen

$$dF = p \cdot dA \quad 2.23$$

dvs

$$F = \int_A p \cdot dA = p \int_A dA = p \cdot A \quad 2.24$$

där p är trycket per ytenhet och dA en elementaryta. De elementarkrafter, $p dA$, vilka verkar på ytan A , är parallella. En skalär summering ger därför resultantkraftens storlek. Resultantkraftens riktning är vinkelrät mot ytan om p är positivt, vinkelrät från ytan om p är negativt.

Med hjälp av figur 2.10 kan vi bestämma resultantkraftens angreppspunkt, dvs den punkt på ytan, där kraftmomentet kring en godtycklig axel genom punkten är noll. Eftersom resultantens moment (se Bihang 2.1) måste vara lika med summan av krafternas moment kring en godtyckligt vald axel, t ex x -axeln, kan vi skriva

$$F y' = \int y \cdot dF \quad 2.25$$

Enligt det föregående är $F = p \cdot A$ och $dF = p dA$ varför

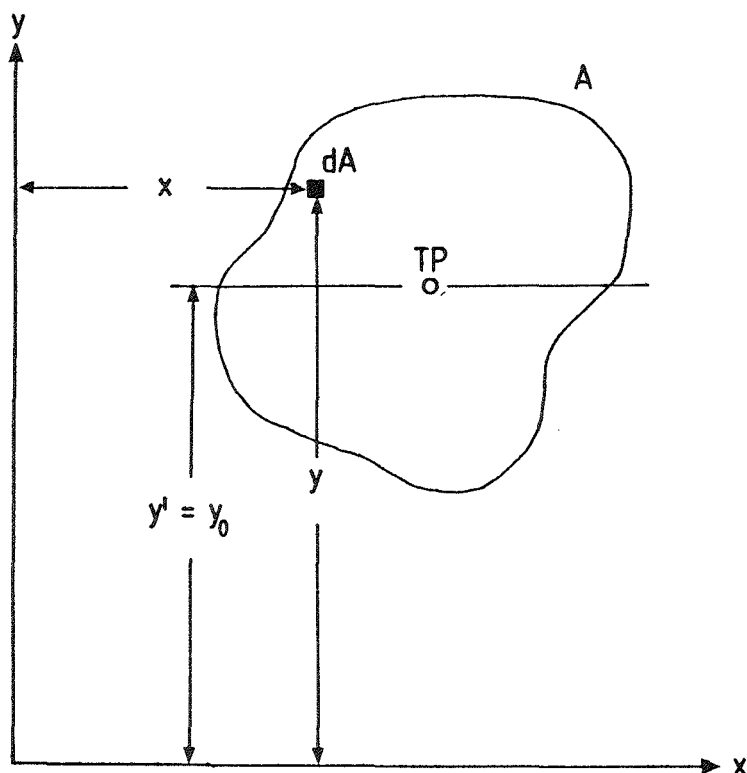
$$p \cdot A \cdot y' = \int_A y \cdot p \cdot dA$$

där y' är avståndet från x -axeln till resultantkraftens anbringningspunkt. Eftersom p är konstant fås

$$y' = \frac{1}{A} \int_A y \cdot dA = y_0 \quad 2.26$$

där y_0 är avståndet till ytans tyngdpunkt (se Bihang 2.1).

Sammanfattningsvis: Om en horisontell yta utsättes för vätsketryck, går kraftresultanten genom ytans tyngdpunkt.



Figur 2.10

2.5.2. Lutande ytor

I en vätska med densiteten ρ är en plan skiva nedsänkt enl figur 2.11. Skivan lutar α^0 från vertikalplanet. Skärningen mellan skivans plan och fria vätskeytan bildar x-axeln, medan y-axeln är riktad längs skivans eget plan. Vi söker storleken av, riktningen på och angreppspunkten för den av vätskan orsakade resultantkraften riktad mot den plana skivans ena sida.

Om F i figur 2.11 (där djupvariabeln är positiv) är totala tryckkraften mot den plana ytan A (BC) och tryckkraften är dF mot ett infinitesimalt ytelement dA beläget på djupet η blir

$$dF = p dA = \rho \cdot g \cdot \eta \cdot dA \quad 2.27$$

Enligt figur 2.11 gäller emellertid att

$$\eta = y \cdot \cos \alpha ,$$

varför

$$dF = \rho \cdot g \cdot y \cdot \cos(\alpha) \cdot dA$$

Integrering ger

$$F = \rho g \cdot \cos(\alpha) \int y \cdot dA$$

Integralen $\int y \cdot dA$ är ytan A:s (BC:s) moment med avseende på x-axeln (se Bihang 2.1).

Enligt mekaniken gäller (se Bihang 2.1) att hela ytans moment är lika med summan av delytornas moment. Alltså

$$y_0 \cdot A = \int y \cdot dA$$

och således

$$F = \rho \cdot g \cdot \cos(\alpha) \cdot y_0 \cdot A$$

Av figur 2.11 framgår att

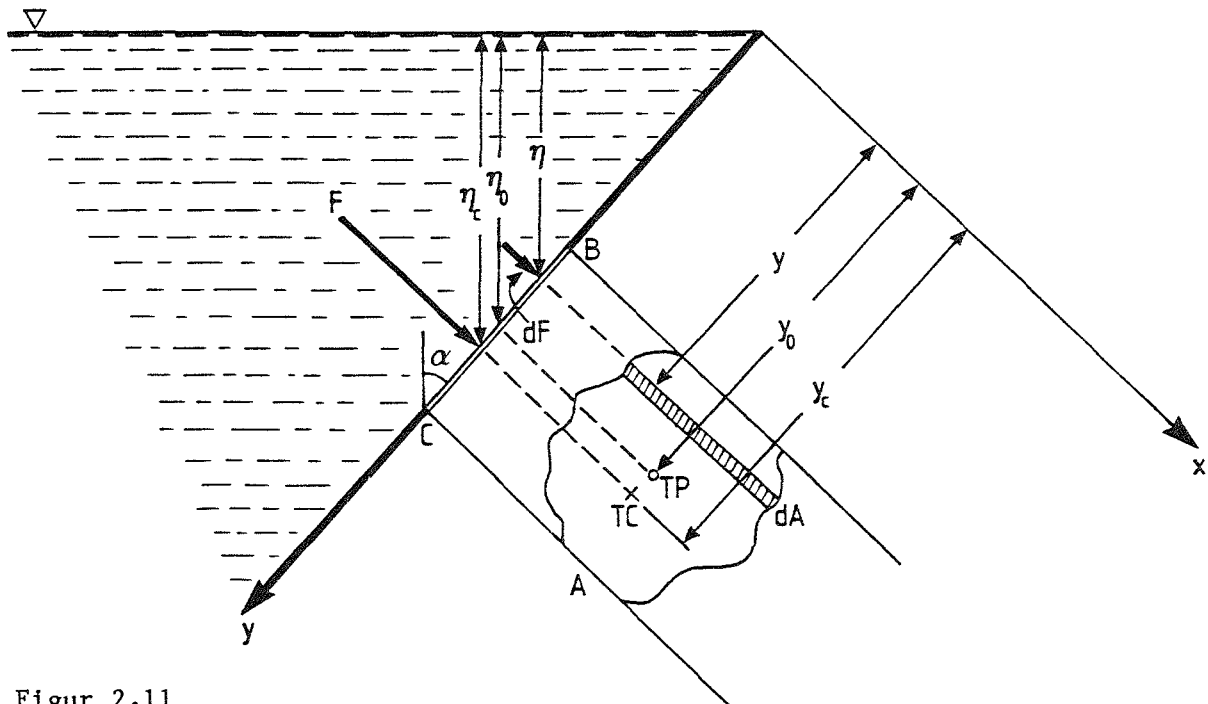
$$\eta_0 = y_0 \cdot \cos \alpha,$$

varför

$$F = \rho \cdot g \cdot \eta_0 \cdot A$$

2.28

Ekvation 2.28 visar att det totala vätsketrycket mot en begränsad plan yta är lika med tyngden av en vätskepelare vilken har ytan som bas och avståndet från ytans tyngdpunkt till den fria vätskeytan som höjd.



Figur 2.11

2.5.3. Tryckcentrum och dess läge på regelbundna ytor

Tryckresultantens angreppspunkt benämnes tryckcentrum och betecknas TC. Den sammanfaller med ytans tyngdpunkt endast om ytan ligger horisontellt (eller om tyngdpunkten är belägen på oändligt stort djup).

Med utgångspunkt från ovanstående definition av tryckcentrum kan vi uppställa följande ekvation, om momenten tages kring x-axeln (fig. 2.11)

$$F \cdot y_c = \int y \cdot dF \quad 2.29$$

där y_c är tryckcentrums y-koordinat.

Eftersom

$$F = \rho \cdot g \cdot \eta_o \cdot A \quad (2.28)$$

och

$$dF = \rho \cdot g \cdot \eta \cdot dA \quad (2.27)$$

ger insättning i ekvation 2.29

$$\rho \cdot g \cdot \eta_o \cdot A \cdot y_c = \rho \cdot g \cdot \eta \cdot \int y \cdot dA$$

Nu är emellertid

$$\eta_o = y_o \cdot \cos(\alpha)$$

och

$$\eta = y \cdot \cos(\alpha),$$

varför

$$\rho \cdot g \cdot y_o \cdot \cos(\alpha) \cdot A \cdot y_c = \rho \cdot g \cdot \cos(\alpha) \int y^2 \cdot dA$$

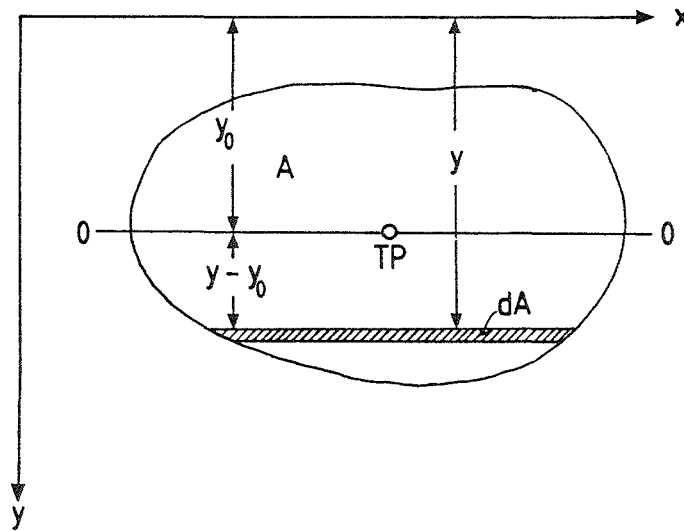
och

$$y_c = \frac{\int y^2 \cdot dA}{y_o \cdot A} = \frac{I_x}{y_o \cdot A} \quad 2.30$$

$I_x = \int y^2 \cdot dA$ är ytan A:s (axiala) tröghetsmoment (se Bihang 2.1) med avseende på x-axeln.

Analogt blir $I_y = \int x^2 \cdot dA$, ytan A:s tröghetsmoment med avseende på y-axeln.

Parallellförflyttningsekvationen och Steiners sats



Figur 2.12

Ytan A:s tröghetsmoment med avseende på x-axeln kan tecknas (jfr fig. 2.12)

$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA$$

En transformering av yttröghetsmomentet, I_x , med avseende på x-axeln till yttröghetsmomentet, I_o , med avseende på en parallellt med x-axeln löpande axel genom tyngdpunkten, leder till uttrycket

$$I_o = \int_A (y - y_o)^2 \cdot dA = \int_A y^2 \cdot dA + y_o^2 \int_A dA - 2y_o \int_A y \cdot dA$$

Men eftersom

$$\int_A y^2 \cdot dA = I_x, \quad \int_A dA = A \quad \text{och} \quad \int_A y \cdot dA = y_o \cdot A$$

erhålles

$$I_o = I_x + y_o^2 \cdot A - 2y_o^2 \cdot A = I_x - y_o^2 \cdot A$$

eller

$$I_x = I_o + y_o^2 \cdot A \quad 2.31$$

Uttrycket 2.31 är parallellförflyttningsekvationen för tröghetsmoment med avseende på ytor. Denna ekvation kan sägas vara ett specialfall av parallellförflyttningssatsen med avseende på masströghetsmoment, ett teorem som ofta kallas Steiners sats efter den schweizisk-tyske matematikern Jakob Steiner (1796 - 1863).

Insättning av ekvation 2.31 i ekvation 2.30 ger

$$y_c = \frac{I_x}{y_o \cdot A} = \frac{I_o + y_o^2 \cdot A}{y_o \cdot A} = y_o + \frac{I_o}{y_o \cdot A} \quad 2.32$$

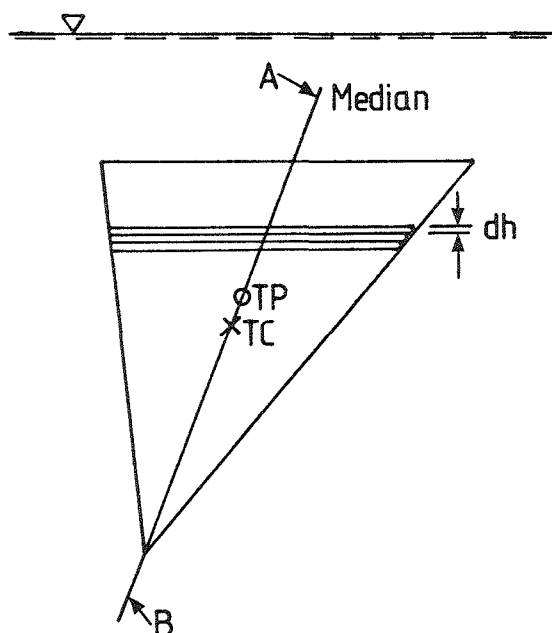
Ekvation 2.32 kan också skrivas

$$y_c - y_o = \frac{I_o}{y_o \cdot A} \quad 2.33$$

I_o i ekvation 2.33 kan aldrig ha negativt värde, varför $y_c - y_o$ alltid är positivt.

För varje icke horisontellt liggande yta gäller att dess tryckcentrum alltid ligger lägre än dess tyngdpunkt. Avståndet mellan tryckcentrum och tyngdpunkt minskar dock med ökat avstånd mellan ytans överkant och vätskeytan. Detta förhållande tillåter, vid nedsänkingsdjup som är stora i förhållande till nedsänkt yta, approximationen att låta resultantkraften verka genom ytans tyngdpunkt.

Tryckcentrums läge i sidled för regelbundna plana ytor, som t ex i figur 2.13, kan bestämmas genom uppdelning av ifrågavarande yta i ett stort antal rektanglar med den differentiella höjden dh . Tyngdpunkten och tryckcentrum i var och en av dessa små ytor sammanfaller, vilket medför att resultantkrafterna för varje liten delyta kommer att verka på medianen AB. Enligt mekanikens lagar måste också angreppspunkten för dessa krafter resultant ligga på medianen. Punkten blir då hela ytans tryckcentrum.



Figur 2.13

2.5.4. Tryckcentrums läge på oregelbundna ytor

För oregelbundna, plana ytor är tryckcentrums läge bestämt av de båda koordinaterna (ej enbart av en).

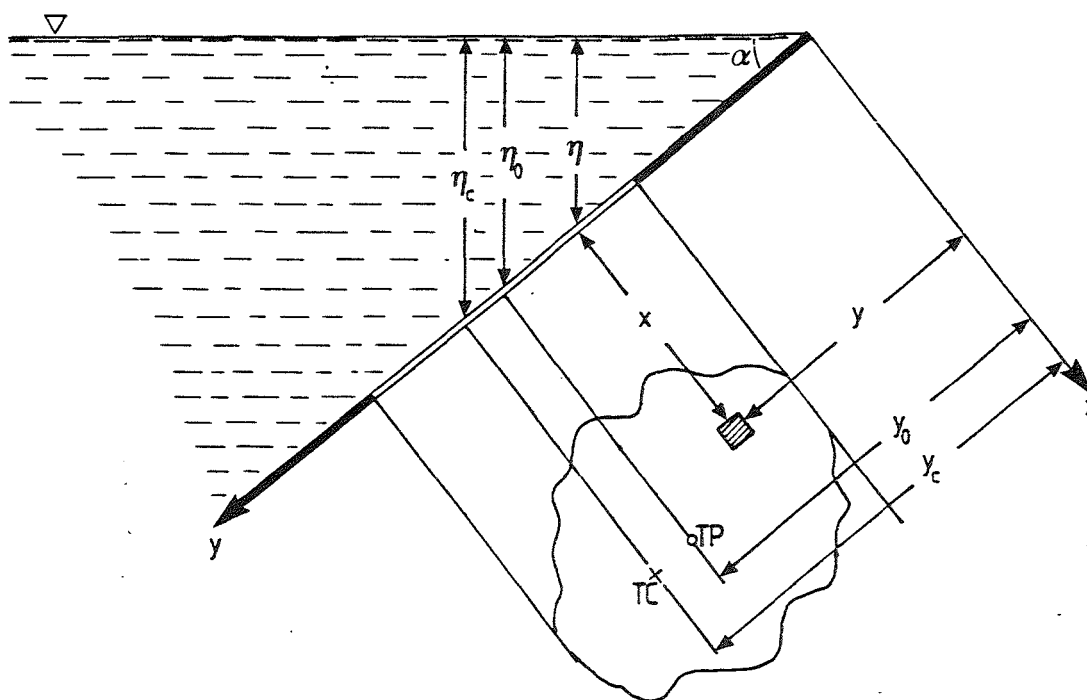
Vi beräknar tryckcentrums läge även för x-koordinaten (fig. 2.14).

Enligt definitionen på tryckcentrum gäller att (jfr ekvation 2.29)

$$F \cdot x_c = \int x \cdot dF \quad 2.34$$

Enligt det föregående (ekvation 2.27) har vi också att

$$dF = p \cdot dA = \rho \cdot g \cdot \eta \cdot dA$$



Figur 2.14

Av figur 2.14 framgår att

$$\eta = y \cdot \sin(\alpha)$$

varför

$$F \cdot x_c = \rho \cdot g \cdot \sin(\alpha) \cdot \int x \cdot y \cdot dA$$

Eftersom

$$F = \rho \cdot g \cdot \eta_0 \cdot A \quad \text{och} \quad \eta_0 = y_0 \cdot \sin(\alpha)$$

fås

$$F \cdot x_c = \rho \cdot g \cdot y_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot A \cdot x_c = \rho \cdot g \cdot \sin(\alpha) \int x \cdot y \cdot dA$$

eller

$$y_o \cdot A \cdot x_c = \int x \cdot y \cdot dA$$

dvs

$$x_c = \frac{\int x \cdot y \cdot dA}{y_o \cdot A} = \frac{I_{xy}}{y_o \cdot A} \quad 2.35$$

Integralen $\int x \cdot y \cdot dA$ kallas inom mekaniken deviationsmoment och betecknas I_{xy} .

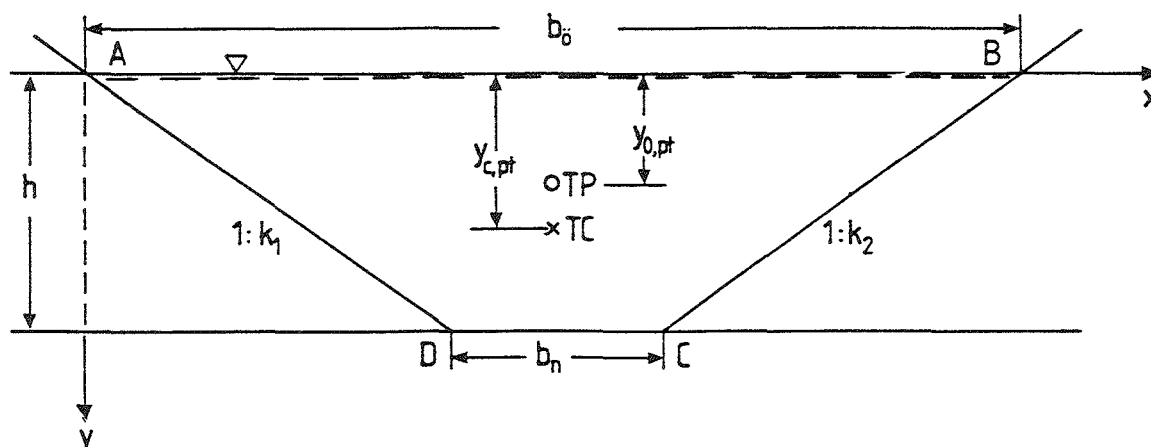
2.5.5. Några tillämpningsexempel rörande tryck mot plana ytor

Illustrativt exempel 2.6

En fördämning i ett öppet dike har i transversellt led formen av ett parallelltrapets. Dämmets uppströmssida är lodrät. Den kortare av de båda parallella sidorna ("bottenbredden") är b_n meter. Bredden i vattenytan är b_g meter. Vattendjupet är h meter och släntlutningskoefficienterna är k_1 respektive k_2 (dessa koefficienter står för tangenterna för respektive slänts lutningsvinkel mot vertikalplanet i dikets riktning). Vattnets densitet kan sättas till ρ kg/m³.

Härled uttryck för

- (a) resultanttrycket mot dämnet
(b) djupläget för resultanttryckets anbringningspunkt (tryckcentrum).



Lösning:

Vattentrycket verkar alltså på en trapetsformig yta med höjden h och de båda parallella sidorna b_n respektive b_0 . Vi bestämmer först avståndet, $y_{0,pt}$, mellan trapetsets tyngdpunkt och vattenytan, genom att ta momenten kring en linje längs vattenytan.

Emedan hela ytans moment är lika med summan av delytornas moment (jfr s. 2:18) erhålles

$$y_{o,pt} \cdot A = \int_0^h y \cdot dA \quad [1a]$$

där A betecknar hela arean och dA symboliserar areaelementet.

Eftersom $dA = (b_{\ddot{o}} - k_1 y - k_2 y) dy$ kan formel [1a] överföras till

$$y_{o,pt} \cdot A = \int_0^h (b_{\ddot{o}} - (k_1 + k_2) \cdot y) \cdot y \cdot dy \quad [1b]$$

Med $k_1 + k_2 = c$ kan formel [1b] utvecklas enligt följande:

$$\begin{aligned} y_{o,pt} \cdot A &= b_{\ddot{o}} \int_0^h y \, dy - c \int_0^h y^2 \cdot dy \\ y_{o,pt} \cdot A &= b_{\ddot{o}}/2 \left[y^2 \right]_0^h - c/3 \left[y^3 \right]_0^h \\ y_{o,pt} \cdot A &= \frac{b_{\ddot{o}} \cdot h^2}{2} - \frac{c \cdot h^3}{3} = \frac{(3b_{\ddot{o}} - 2ch) \cdot h^2}{6} \end{aligned}$$

Men eftersom $ch = b_{\ddot{o}} - b_n$

$$y_{o,pt} \cdot A = \frac{(2b_n + b_{\ddot{o}}) \cdot h^2}{6} \quad \text{och}$$

$$y_{o,pt} = \frac{(2b_n + b_{\ddot{o}}) \cdot h^2}{6A}$$

Nu är emellertid

$$A = \frac{(b_n + b_{\ddot{o}}) \cdot h}{2} \quad [2]$$

varför

$$y_{o,pt} = \frac{(2b_n + b_{\ddot{o}}) \cdot h}{3 \cdot (b_n + b_{\ddot{o}})} \quad 2.36a$$

Det kan lätt visas att avståndet $h - y_{o,pt}$ är

$$h - y_{o,pt} = \frac{(b_n + 2b_{\ddot{o}}) \cdot h}{3 \cdot (b_n + b_{\ddot{o}})} \quad 2.36b$$

Ekvationerna 2.36a och 2.36b gäller för lodrätt stående, icke överdämda parallelltrapetser med de båda parallella sidorna vågrätt och oavsett om den kortare eller längre sidan ligger nederst. Att ett parallelltrapets icke är överdämt innebär att trapetsets övre sida ligger i vätskeytan.

(a) Resultanttrycket kan tecknas enligt ekvation 2.28 (s. 2:18)

$$F = \rho \cdot g \cdot y_o \cdot A \quad (2.28)$$

dvs i förhandenvarande fall

$$F_{pt} = \frac{\rho \cdot g \cdot (2b_n + b_{\ddot{o}}) \cdot h \cdot (b_n + b_{\ddot{o}}) \cdot h}{3 \cdot (b_n + b_{\ddot{o}}) \cdot 2} = \frac{\rho \cdot g}{6} (2b_n + b_{\ddot{o}}) \cdot h^2$$

Resultanttrycket, F_{pt} , mot ett vertikaltställt parallelltrapets med övre sidan i vattenlinjen är alltså

$$F_{pt} = \frac{\rho \cdot g}{6} (2b_n + b_{\ddot{o}}) \cdot h^2 \quad 2.37$$

(b) Tryckcentrums djupläge

Ekvation 2.30 på s. 2:19 kan skrivas

$$y_{c,pt} \cdot y_{o,pt} \cdot A = I_{x,pt} = \int_0^h y^2 \cdot dA \quad [3a]$$

där $y_{c,pt}$ och $y_{o,pt}$ är djupläget för tryckcentrum resp tyngdpunkt för ett vertikalt stående, icke överdämt parallelltrapets. A representerar hela den area som utsättes för tryck och dA symboliserar det differentiella areaelementet. $I_{x,pt}$ är tröghetsmomentet kring en linje längs vattenytan.

Såsom tidigare visats är $dA = (b_{\ddot{o}} - cy) \cdot dy$, med $c = k_1 + k_2$. Formel [3a] kan därför tecknas

$$I_{x,pt} = \int_0^h (b_{\ddot{o}} - cy) \cdot y^2 \cdot dy \quad [3b]$$

Utveckling av [3b] ger

$$I_{x,pt} = b_{\ddot{o}} \int_0^h y^2 \cdot dy - c \int_0^h y^3 \cdot dy$$

$$I_{x,pt} = b_{\ddot{o}}/3 \ y^3 \Big|_0^h - c/4 \ y^4 \Big|_0^h$$

$$I_{x,pt} = \frac{(3b_n + b_{\ddot{o}}) \cdot h^3}{12} \quad 2.38$$

Ekvation 2.38 gäller oavsett om den kortare sidan är nederst eller överst.

Med utgångspunkt från ekvation 2.31 och med utnyttjande av ekvationerna 2.36a och 2.38 samt av formel [2] kan man visa att parallelltrapetsets yttröghetsmoment, $I_{o,pt}$, kring en genom tyngdpunkten och parallellt med de jämlöpande sidorna gående axel definieras av följande ekvation:

$$I_{o,pt} = \frac{(b_n^2 + b_{\ddot{o}}^2 + 4b_n \cdot b_{\ddot{o}}) \cdot h^3}{36 \cdot (b_n + b_{\ddot{o}})} \quad 2.39$$

Med hjälp av formel [3a] och ekvation 2.38 erhålles

$$y_{c,pt} = \frac{I_{x,pt}}{y_{o,pt} \cdot A} = \frac{(3b_n + b_{\ddot{o}}) \cdot h^3}{12 \cdot y_{o,pt} \cdot A} \quad [4a]$$

Enligt ekvation 2.36a respektive formel [2] gäller emellertid att

$$y_{o,pt} = \frac{(2b_n + b_{\ddot{o}}) \cdot h}{3 \cdot (b_n + b_{\ddot{o}})} \quad \text{och} \quad A = \frac{(b_n + b_{\ddot{o}}) \cdot h}{2}$$

varav följer att

$$y_{c,pt} = \frac{(3b_n + b_{\ddot{o}}) \cdot h^3 \cdot 3 \cdot (b_n + b_{\ddot{o}}) \cdot 2}{12 \cdot (2b_n + b_{\ddot{o}}) \cdot h \cdot (b_n + b_{\ddot{o}}) \cdot h} = \frac{(3b_n + b_{\ddot{o}}) \cdot h}{2 \cdot (2b_n + b_{\ddot{o}})} \quad [4b]$$

Det är alltså så att tryckcentrums djupläge, $y_{c,pt}$, för ett vertikalt stående (icke överdämt) parallelltrapets definieras av ekvationen:

$$y_{c,pt} = \frac{(3b_n + b_{\ddot{o}}) \cdot h}{2 \cdot (2b_n + b_{\ddot{o}})} \quad 2.40a$$

För $h - y_{c,pt}$ gäller

$$h - y_{c,pt} = \frac{(b_n + 3b_{\ddot{o}}) \cdot h}{2 \cdot (2b_n + b_{\ddot{o}})} \quad 2.40b$$

Ekvationerna 2.40a och 2.40b gäller för lodrätt stående parallelltrapetser med de båda parallella sidorna vågrätt och oavsett om den kortare eller längre sidan ligger nederst, under förutsättning att trapetserna inte är överdämda (jfr s. 2:25, första stycket).

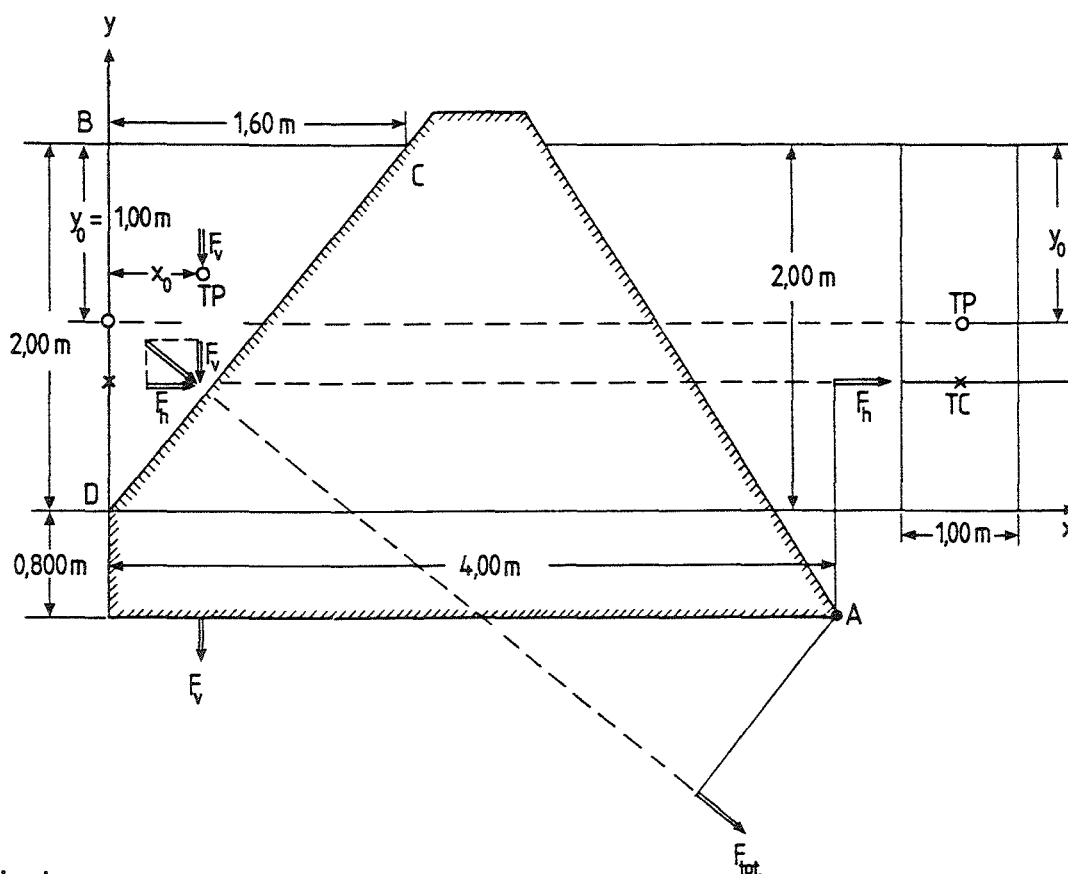
Svar till illustrativt exempel 2.6:

$$(a) \text{ Resultanttrycket} = F_{pt} = \frac{\rho \cdot g}{6} (2b_n + b_{\ddot{o}}) \cdot h^2$$

$$(b) \text{ Tryckcentrumsavstånd} = y_{c,pt} = \frac{(3b_n + b_{\ddot{o}}) \cdot h}{2 \cdot (2b_n + b_{\ddot{o}})}$$

Illustrativt exempel 2.7

Nedanstående skiss visar en tvärsektion av en fördämningsvall. Vilket kraftmoment per längdmeter av vallen åstadkommer det 2,00 m höga vattenståndet kring momentpunkten A? Det förutsättes att ingen läckning förekommer vare sig genom eller under fördämningen ($\rho_{\text{vatten}} = 999 \text{ kg/m}^3$).

Lösning:

Den horisontella kraften, F_h , verkar på en yta, A_y , som är den vertikala projektionen av den lutande ytan. I ekvation 2.28 (s. 2:19) kan då insättas $F = F_h$, $\eta_o = y_o$ och $A = A_y$, dvs

$$F_h = \rho \cdot g \cdot y_o \cdot A_y$$

där

$$\rho \cdot g = 999 \times 9,82 = 9810 \text{ N/m}^3$$

$$y_o = 1,00 \text{ m}$$

$$A_y = 1 \times 2,00 = 2,00 \text{ m}^2$$

Vi får alltså

$$F_h = 9810 \times 1,00 \times 2,00 = 19620 \text{ N} \quad [1]$$

För den vertikala kraften, F_v , gäller sambandet

$$F_v = \rho \cdot g \cdot V$$

där

$$\rho \cdot g = 999 \times 9,82 = 9810 \text{ N/m}^3$$

$$V = \frac{2,00 \times 1,60 \times 1}{2} = 1,60 \text{ m}^3$$

Vi får alltså

$$F_v = 9810 \times 1,60 = 15696 \text{ N} \quad [2]$$

För att F_h :s hävstångsarm med avseende på momentpunkten A skall erhållas, bestäms y_c med hjälp av ekvation 2.32, dvs

$$y_c = y_o + \frac{I_o}{y_o \cdot A} \quad (2.32)$$

där

$$y_o = 1,00 \text{ m}$$

$$I_o = \frac{bh^3}{12} = \frac{1 \times 2,00^3}{12} = \frac{2}{3} \text{ m}^4 \quad (\text{se Bihang 2.1})$$

och

$$A_y = 1 \times 2,00 = 2,00 \text{ m}^2.$$

Vi erhåller

$$y_c = 1,00 + \frac{2}{3 \times 1,00 \times 2,00} = 1,00 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \approx 1,33 \text{ m}$$

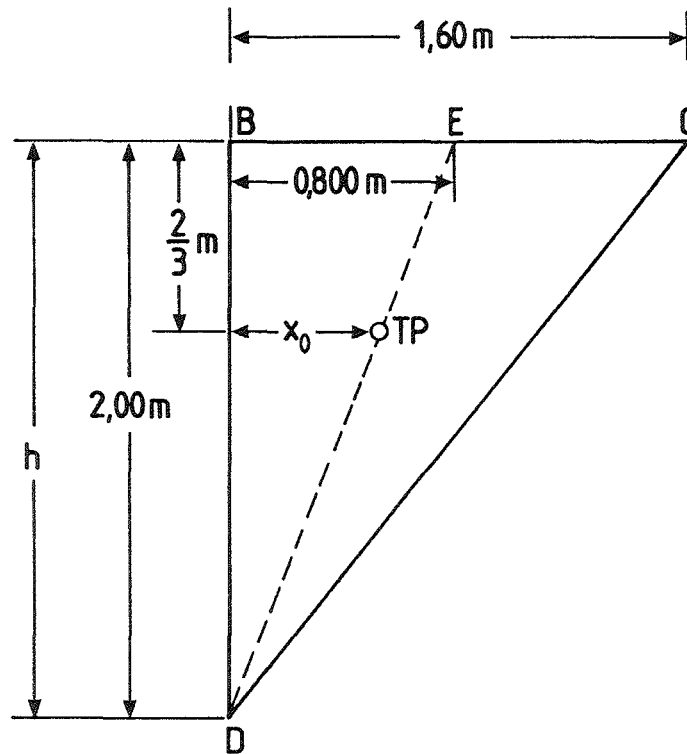
F_h :s hävstångsarm med avseende på A blir då

$$2,00 + 0,80 - \frac{4}{3} = \frac{22}{15} \approx 1,467 \text{ m}$$

Kraften F_h :s moment (medsols) kan tecknas

$$19620 \times \frac{22}{15} = 28777 \text{ Nm}$$

Eftersom F_v angriper i volymen BCD:s tyngdpunkt, så måste vi, för att erhålla F_v :s hävstångsarm med avseende på A, bestämma längden av den sträcka som betecknas med x_o i figuren på föregående sida.



Tyngdpunkten ligger utefter medianen DE på vinkelräta avståndet $1/3 h$ från linjen BC i figuren ovan. Till följd härav gäller att

$$\frac{x_0}{0,800} = \frac{2,00 - \frac{2}{3}}{2,00}$$

$$x_0 = \frac{8}{15}$$

F_v :s hävstångsarm med avseende på A blir då i anslutning till figuren

$$4,00 - \frac{8}{15} = \frac{52}{15}$$

Kraften F_v :s moment (motsols) fås sedan till

$$15696 \times \frac{52}{15} = 54414 \text{ Nm}$$

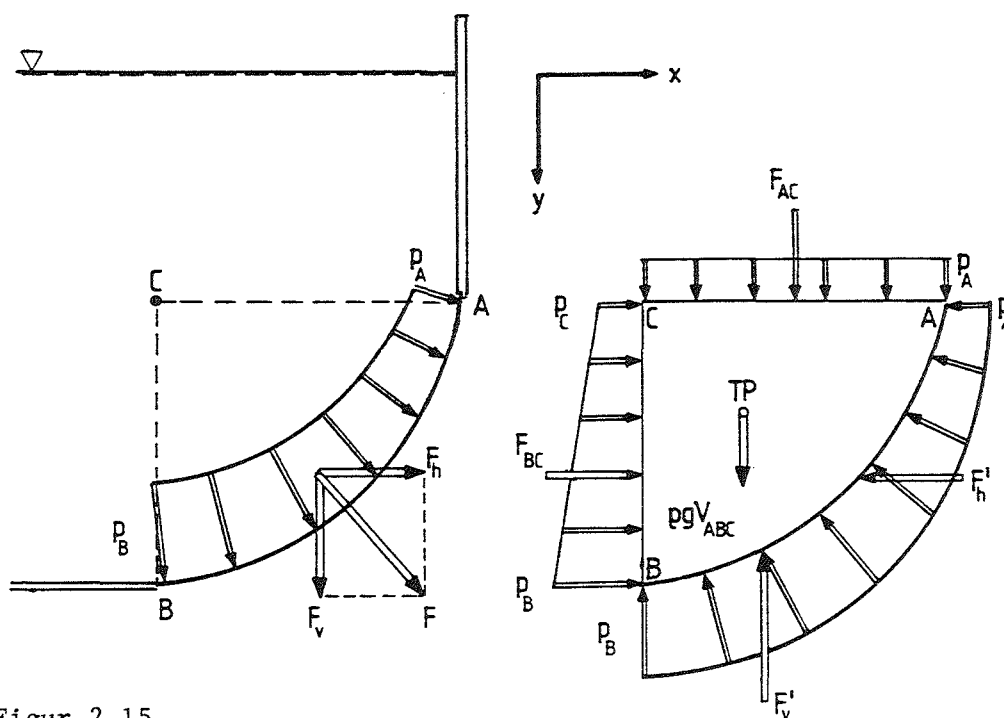
Resultterande moment (motsols)

$$54414 - 28777 = 25637 \text{ Nm} \approx \underline{25600 \text{ Nm}}$$

2.6. VÄTSKETRYCK MOT BUKTIGA YTOR

Resultantkrafter mot i vätskor nedsänkta buktiga ytor kan ofta inte direkt beräknas med metoderna redovisade i föregående avsnitt. Bestämningen sker här lämpligen genom att storleken av resultantkrafternas horisontella och vertikala komponenter först beräknas och därefter sammansättes.

Vi studerar kraftverkan på den buktiga delen AB av en sida av behållaren i figur 2.15. På varje litet ytelement kan storleken, riktningen och lokaliseringen av tryckkraften bestämmas enligt i det föregående angivna principer. Detta leder till den i figuren skisserade tryckfördelningen, vilken sedan kan reduceras till en enda resultant F med komponenterna F_h och F_v .



Figur 2.15

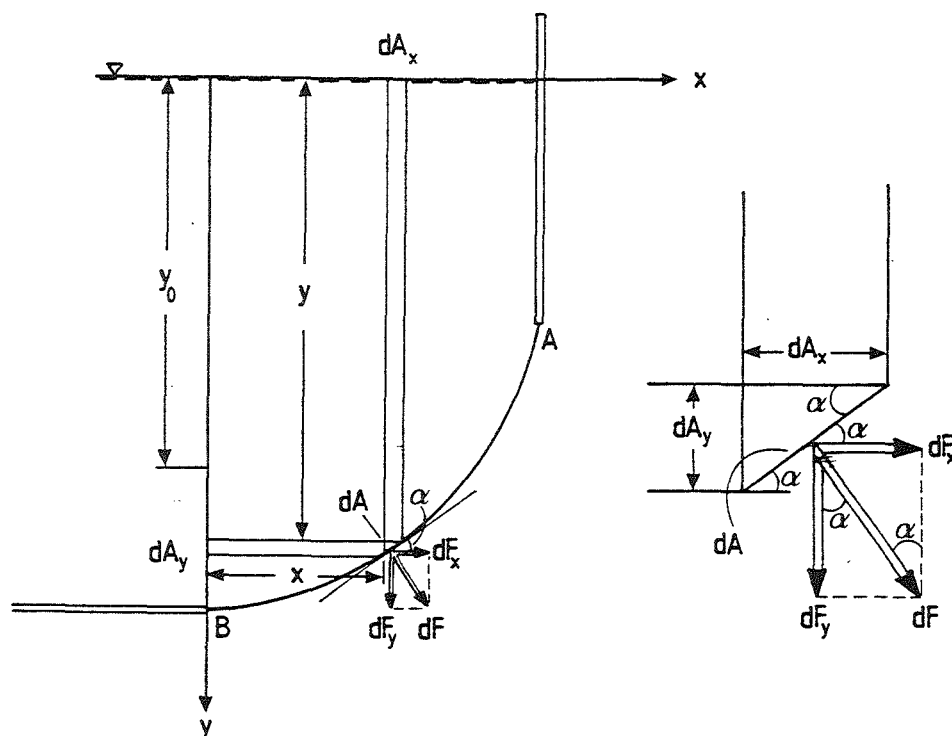
Analys av den "fria kroppen" ABC tillåter beräkning av F'_h och F'_v , dvs av komponenterna till resultantkraften utövad av ytan AB på vätskan. För statisk jämvikt gäller:

$$F_x = F_{BC} + F'_h = 0$$

$$F_y = F_{AC} + \rho \cdot g \cdot V_{ABC} + F'_v = 0$$

Här blir $F'_h = -F_{BC}$ och $F'_v = -(F_{AC} + \rho \cdot g \cdot V_{ABC})$. Jämvikten fordrar nämligen att F'_h måste vara lika stor som, men motsatt riktad F_{BC} . Likaså måste F'_v vara lika stor som, men motsatt riktad summan av krafterna F_{AC} och $\rho \cdot g \cdot V_{ABC}$. Problemlösningen reduceras till en beräkning av storlek och läge av F_{BC} , F_{AC} och $\rho \cdot g \cdot V_{ABC}$. Krafterna F_{BC} och F_{AC} kan bestämmas enligt avsnitt 2.7., medan $\rho \cdot g \cdot V_{ABC}$ är tyngden av den "fria kroppen" ABC, en kraft som ju kan sägas verka genom tyngdpunkten.

För att den resulterande kraften mot den i vätskan befintliga ytan AB i figur 2.15 skall kunna beräknas, så måste denna krafts vertikala och horisontella komponenter bestämmas (fig. 2.16).



Figur 2.16

Eftersom, enligt vad tidigare anförts (s. 2:19), $dF = \rho \cdot g \cdot \eta \cdot dA$ och η i här aktuellt fall är lika med y fås

$$dF = \rho \cdot g \cdot y \cdot dA$$

Enligt figur 2.16 gäller att

$$dF_x = dF \cdot \sin \alpha = \rho \cdot g \cdot y \cdot dA \cdot \sin \alpha$$

Men eftersom $dA \cdot \sin \alpha = dA_y$ får vi

$$dF_x = \rho \cdot g \cdot y \cdot dA_y$$

Integrering ger

$$F_x = \rho \cdot g \cdot \int_{A_y} y \cdot dA_y = \rho \cdot g \cdot y_0 \cdot A_y \quad 2.41$$

Ekvation 2.41 visar att den horisontella tryckkraft som en vätskekropp åstadkommer mot en buktad yta på en fast kropp, är lika med den tryckkraft som vätskan kan sägas utöva på fastkroppsykans vertikala projektion. y-koordinaten för den horisontella tryckkraftens angreppspunkt är lika med y-koordinaten för projektykans tryckcentrum.

För dF_y gäller

$$dF_y = dF \cdot \cos \alpha = \rho \cdot g \cdot y \cdot dA \cdot \cos \alpha$$

Men

$$dA \cdot \cos \alpha = dA_x,$$

varför

$$dF_y = \rho \cdot g \cdot y \cdot dA_x$$

Efter integrering fås

$$F_y = \rho \cdot g \cdot \int y \cdot dA_x \quad 2.42a$$

$y \cdot dA_x$ är volymen av en infinitesimal "skiva". Summan (dvs integralen) av alla skivor är lika med hela volymen, V . Vi kan följaktligen skriva

$$F_y = \rho \cdot g \cdot V \quad 2.42b$$

Ekvation 2.42b visar att den vertikala tryckkraft som en vätskekropp med fri yta orsakar mot en buktad yta på en fast kropp, är lika med tyngden av en vertikal vätskepelare, som nedtill begränsas av den givna fastkroppsytan och upptill av dennas projektion på det horisontella plan vari den fria vätskeytan ligger. Detta gäller oavsett om vätskan fyller ifrågasvarande rum eller ej. x-koordinaten för den vertikala tryckkraftens angreppspunkt är lika med x-koordinaten för vätskepelarens tyngdpunkt.

Resultanten F erhålles sedan till storlek och riktning ur en kraftpolygon. Är ytan cylindrisk eller sfärisk går tryckresultantens verkningslinje alltid genom cylinderns axel, respektive genom sfärens medelpunkt.

Illustrativt exempel 2.8

Tvärsektionen av en vattenbehållare är elliptisk med storaxel och lillaxel 2,00 m respektive 1,20 m. Behållaren har både längdaxeln och ändarnas storaxlar horisontella. Bestäm, under förutsättning att tanken är helt fylld med vatten ($\rho_{\text{vatten}} = 999 \text{ kg/m}^3$), tryckkraften per längdenhet

a) mot undre halvan av tanken

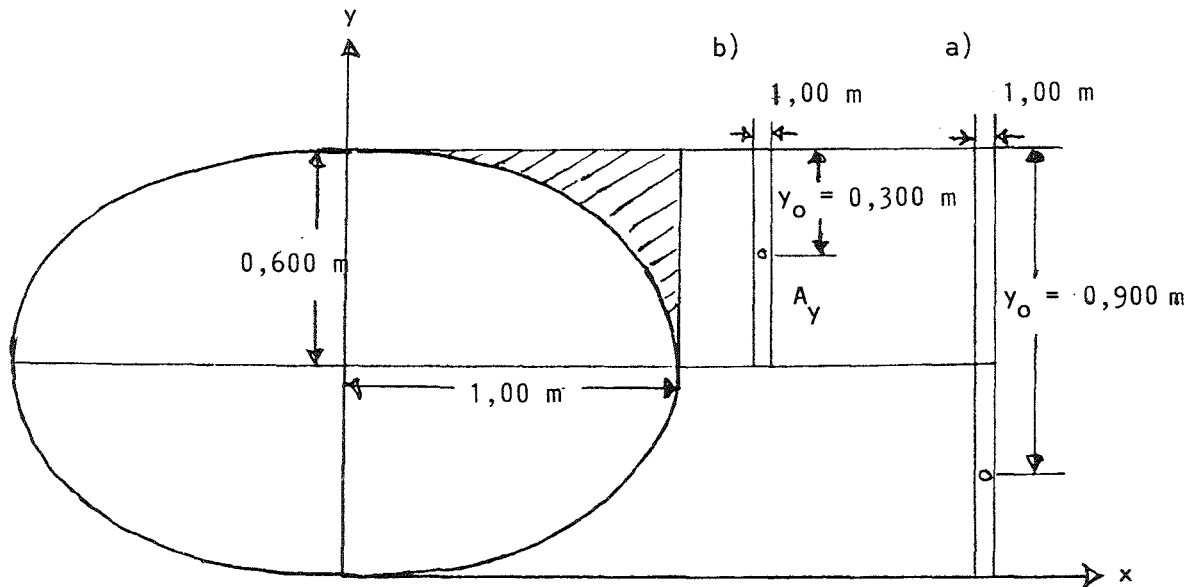
b) mot övre halvan av tanken

Lösning: Vi använder relationerna

$$F_h = \rho \cdot g \cdot y_o \cdot A_y \quad [1]$$

$$F_v = \rho \cdot g \cdot V \quad [2]$$

$$F_{\text{tot}} = 2 \cdot \sqrt{F_h^2 + F_v^2} \quad [3]$$



a) För undre halvan fås då:

$$y_{O,u} = 0,600 + \frac{0,600}{2} = 0,900 \text{ m};$$

$$A_{y,n} = 0,600 \text{ m}^2$$

Formel [1] ger för ena hälften av undre halvan:

$$F_{h,u} = 999 \times 9,82 \times 0,900 \times 0,600 = 5297 \text{ N} \approx 5,30 \text{ kN}$$

V i formel [2] blir för undre halvans ena hälft:

$$V_u = \frac{\pi \times 1,0 \times 0,60 \times 1,0}{4} + 1,0 \times 0,60 \times 1,0 \approx 1,0712 \text{ m}^3$$

Formel [2] ger (för ena hälften av undre halvan):

$$F_{v,u} = 999 \times 9,82 \times 1,0712 = 10509 \text{ N} \approx 10,5 \text{ kN}$$

Insättning i formel [3] ger slutligen för undre halvans båda hälfter:

$$F_{\text{tot},u} = 2 \sqrt{5297^2 + 10509^2} = 23538 \text{ N} \approx 23,5 \text{ kN}$$

b) För övre halvan gäller följande:

Med hjälp av figuren erhålles

$$y_{O,\ddot{o}} = 0,300 \text{ m}; \quad A_{y,\ddot{o}} = 0,600 \text{ m}^2$$

Formel [1] kan då för ena hälften av övre halvan skrivas:

$$F_{h,\ddot{o}} = 999 \times 9,82 \times 0,300 \times 0,600 = 1766 \text{ N} \approx 1,77 \text{ kN}$$

Vi har vidare att ellipsens yta är $\pi \times 1,00 \times 0,600 = 1,885 \text{ m}^2$.

V i formel [2] blir därför för övre halvans ena hälft:

$$V_{\ddot{o}} = 0,600 \times 1,00 \times 1,00 - \frac{\pi \times 1,00 \times 0,600 \times 1,00}{4} = 0,1288 \text{ m}^3$$

Formel [2] ger (för ena hälften av övre halvan):

$$F_{v,\ddot{o}} = 999 \times 9,82 \times 0,1288 = 1263 \text{ N} \approx 1,26 \text{ kN}$$

Insättning i formel [3] ger slutligen för övre halvans båda hälfter:

$$F_{\text{tot},\ddot{o}} = 2 \sqrt{1766^2 + 1263^2} = 4342 \text{ N} \approx 4,34 \text{ kN}$$

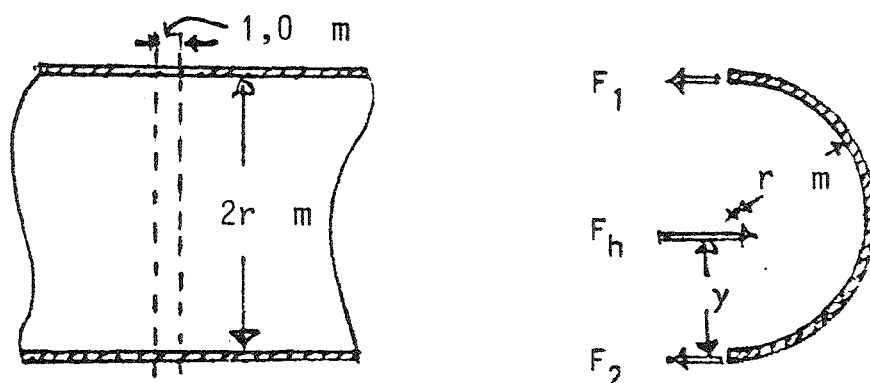
2.7. DRAGPÅKÄNNINGAR ORSAKADE AV INRE TRYCK

2.7.1. Dragpåkänning i ett tunnväggigt rör

Ett cirkulärt rör får under inverkan av ett inre tryck en spänning i godset kring sitt cirkulära tvärsnitts periferi. Om vi antar att inga längsriktade spänningskrafter uppträder, kan dragpåkänningen illustreras såsom i figur 2.17.

Vi studerar en tvärsektion av en 1,0 m lång bit av röret. Om ena hälften av rörbiten tas som en "fri kropp", kan spänningskrafterna per längdmeter vid ovansidan och undersidan betecknas F_1 respektive F_2 .

Den horisontella kraftkomponenten F_h verkar genom projektionsareans tryckcentrum och är $p \cdot 2r$, där p står för trycket i tryckcentrumlinjen i N/m^2 och r betecknar rörets inre radie i meter.



Figur 2.17

Vid höga tryck sammanfaller tryckcentrum praktiskt taget med rörcentrum, vilket får till följd att F_1 kan sättas lika med F_2 samt att

$$F_1 = F_2 = F = p \cdot r \quad 2.43$$

där F är dragspänning per längdmeter rör. Med vägg tjockleken δ meter blir dragpåkänningen, σ , i rörväggen:

$$\sigma = \frac{F}{\delta} = \frac{p \cdot r}{\delta} \quad 2.44$$

Vid större skillnader mellan trycken vid över- och undersidan av röret måste tryckcentrums läge beräknas. Två ekvationer fordras då, nämligen (se fig. 2.17)

$$F_1 + F_2 = 2 \cdot p \cdot r$$

$$2r \cdot F_1 - 2 \cdot p \cdot r \cdot y = 0$$

Den andra av dessa ekvationer bygger på momenten kring den "fria kroppens" nedre ända, med bortseende från den vertikala kraftkomponenten.

Vi löser ekvationssystemet och får

$$F_1 = p \cdot y; \quad F_2 = p \cdot (2r - y)$$

med tyngdpunktsavståndet, y , i meter.

Illustrativt exempel 2.9

Ett stål rör med en inre diameter, $2r$, av 0,100 m har en vägg tjocklek, δ , av 6,40 mm. Vilket högsta tryck, p , kan tolereras, om maximalt tillåten dragspänning, σ , är 5,00 MPa?

Lösning:

$$\sigma = \frac{p \cdot r}{\delta} \cong 5 \cdot 10^6 = \frac{0,05 \cdot p}{0,0064} \quad (2.44)$$

och alltså

$$p = 640\,000 \text{ Pa} = 0,640 \text{ MPa}$$

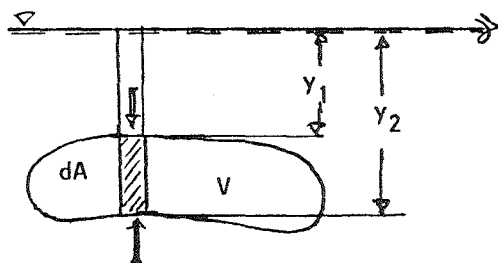
2.7.2. Dragpåkänningen i ett tunt, sfäriskt skal

Om ett tunt sfäriskt skal är föremål för ett inre tryck kan man - om man bortser från tyngden av vätskan eller gasen inom sfären - finna uttryck för spänningen i väggarna genom att studera kraftverkan på en av de halvklotskalotter som uppkommer vid delning av det sfäriska skalet i ett vertikalt plan genom sfärens medelpunkt.

I den aktuella vätskan eller gasen är den kraftkomponent som vinkelrät från planet är riktad mot halvklotskalets insida $p \cdot \pi \cdot r^2$, med r betecknande radien. Spänningen, σ (i pascal), gånger den avskurna väggens snittarea, $2\pi \cdot r \cdot \delta$, där δ anger väggjockleken, måste balansera kraftkomponenten. Härav följer att

$$\sigma = \frac{p \cdot r}{2\delta} \quad 2.45$$

2.8. HYDROSTATISK LYFTKRAFT - ARKIMÉDES PRINCIP



Figur 2.18

Vi antar att en i en vätska nedsänkt kropp är indelad i differentiellt tunna vertikala volymssegment med horisontella tvärsnittet dA (fig. 2.18).

Vertikalt mot varje sådant volymsegment verkar mot övre ytan tryckkraften $\rho \cdot g \cdot y_1 \cdot dA$ nedåt och mot undre ytan tryckkraften $\rho \cdot g \cdot y_2 \cdot dA$ uppåt.

Den vertikalt uppåt riktade kraftresultanten blir

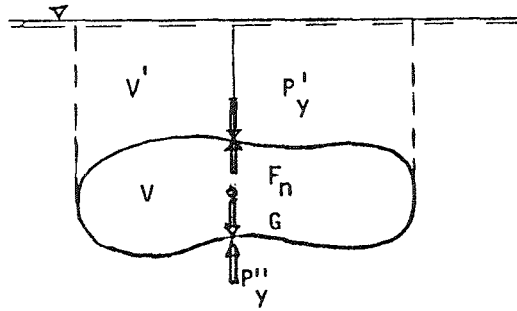
$$dF_u = \rho \cdot g \cdot (y_2 - y_1) \cdot dA$$

Detta uttryck anger tyngden av en vätskevolym med samma tyngd som volymselementet. För hela kroppen fås efter integrering

$$F_u = \rho \cdot g \int (y_2 - y_1) \cdot dA = \rho \cdot g \cdot V \quad 2.46$$

Den vertikalt uppåt riktade, totala kraftresultanten på en i vätska helt eller delvis nersänkt kropp är lika med displacementet, dvs med den av

kroppen undanträngda vätskemassans tyngd (Arkimedes princip). Kraftresultanten angriper i den undanträngda vätskevolymens tyngdpunkt.



Figur 2.19

Arkimedes princip kan också härledas på följande sätt:

Figur 2.19 föreställer en kropp nersänkt i en vätska med tätheten ρ . Kroppen hänger i en tråd. Spänningen i tråden är lika med F_n . Resulterande nedåtriktade tryckkraften $= p'_y$ och resulterande uppåtriktade tryckkraften $= p''_y$. Kroppens tyngd $= G$.

För jämvikt fordras

$$p'_y + G - p''_y = F_n$$

Nu är emellertid

$$p'_y = \rho \cdot g \cdot V'$$

och

$$p''_y = \rho \cdot g \cdot (V + V')$$

varför

$$\rho \cdot g \cdot V' + G - \rho \cdot g \cdot (V + V') = F_n$$

eller

$$G - \rho \cdot g \cdot V = F_n \quad 2.47$$

Resultatet av bevisföringen kan i ord uttryckas: Kroppen förlorar lika mycket i tyngd, som tyngden av den undanträngda vätskevolymen.

Illustrativt exempel 2.10

På grund av vattnets tryck "tätar" ett massivt träklot ($\rho_{\text{trä}} = 855 \text{ kg/m}^3$) med diametern 0,200 m en öppning (diameter 0,100 m) i botten på en behållare med vatten. Vattenståndet i behållaren är 0,300 m. $\rho_{\text{vatten}} = 999 \text{ kg/m}^3$.

Beräkna den nedåtriktade kraft som verkar på klotet i öppningen. Klotet kommer att flyta upp om denna kraft blir noll. Kan detta någonsin inträffa om vattenståndet ändras?

Lösning:

Med stöd av figuren kan följande jämviktsekvation uppställas

$$F_{n,1} + F_{n,2} - F_u = 0 \quad [1a]$$

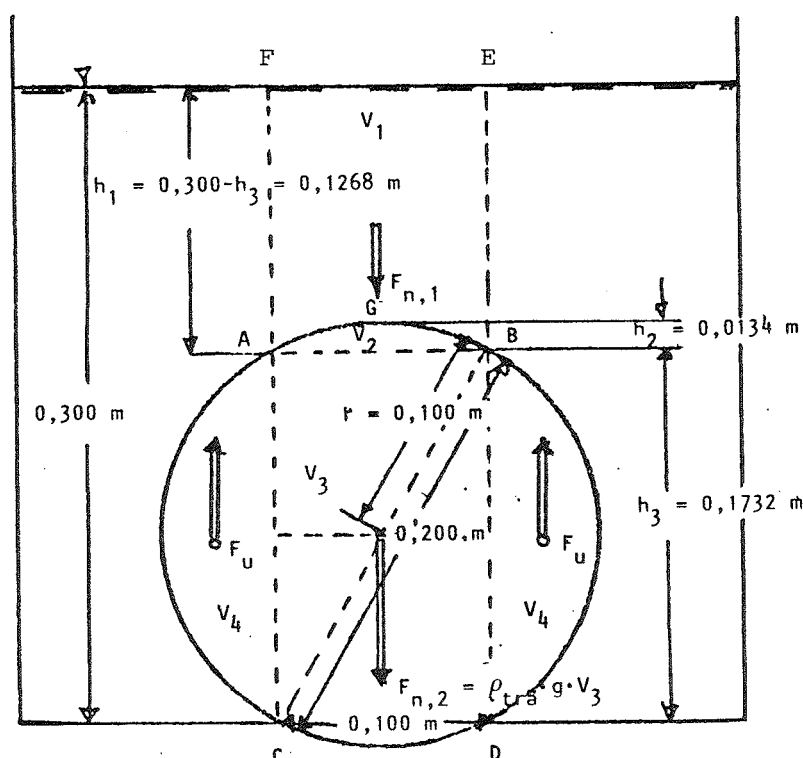
där

$$F_{n,2} = \rho_{\text{trä}} \cdot g \cdot V_3, \text{ med } V_3 \text{ betecknande träklotets volym}$$

Formel [1a] kan skrivas

$$\Delta F = F_u - F_{n,1} - F_{n,2} \quad [1b]$$

med ΔF betecknande skillnaden mellan uppåtriktad och nedåtriktad kraft.



Vi beräknar först $F_{n,1}$ under antagande att atmosfärstrycket sättes lika med noll. Storleken av volymen ovanför segmentytan AGBA måste definieras. Benämnes denna volym V_1 fås

$$V_1 = \text{Volymen av cylindern ABEFA} - \text{volymen av segmentet AGBA} \quad [2]$$

För att cylinderhöjden, h_1 , skall kunna bestämmas måste h_3 beräknas. Vi får enligt figurens beteckningar

$$h_3^2 + (0,100)^2 = (0,200)^2; \quad h_3 = 0,1 \sqrt{3} \approx 0,1732 \text{ m}$$

$$h_1 = 0,300 - 0,1 \sqrt{3} = 0,1 (3 - \sqrt{3}) \approx 0,1268 \text{ m}$$

Volymen av segmentet AGB, V_2 , kan enligt stereometrin beräknas ur formeln

$$V_2 = \frac{\pi h_2^2}{3} (3r - h_2) \quad [3]$$

Vi får för h_2 enligt figuren

$$h_2 = \frac{0,200 - h_3}{2} = 0,100 - 0,05\sqrt{3} = 0,05 \cdot (2 - \sqrt{3}) \approx 0,0134 \text{ m}$$

Formel [2] kan nu tecknas

$$V_1 = \pi \times 0,05^2 \times 0,1268 - \frac{\pi \times 0,0134^2}{3} (3 \times 0,100 - 0,0134)$$

$$V_1 = 0,000995845 - 0,000053871 = 0,000941974 \approx 0,000942 \text{ m}^3$$

Den nedåtriktade kraften $F_{n,1}$ blir då

$$F_{n,1} = \rho_{\text{vatten}} \cdot g \cdot V_1 = 999 \times 9,82 \times 0,000942 \approx 9,24 \text{ N}$$

Tyngden av träklotet:

$$F_{n,2} = \rho_{\text{trä}} \cdot g \cdot V_3 = 855 \times 9,82 \times \frac{4 \times \pi \times 0,100^3}{3} \approx 35,17 \text{ N}$$

Träklotets volym utanför "urborrningen" kan fås ur den stereometriska ekvationen för volymen av genomborrade klot, dvs

$$V_4 = \frac{\pi \cdot h_3^3}{6} = \frac{\pi \cdot 0,1732^3}{6} = 0,00272 \text{ m}^3$$

För den uppåtriktade kraften, F_u , gäller då

$$F_u = \rho_{\text{vatten}} \cdot g \cdot V_4 = 999 \times 9,82 \times 0,00272 \approx 26,69 \text{ N}$$

Formel [1b] ger nu

$$\Delta F = 26,69 - 9,24 - 35,17 = -17,72 \text{ N},$$

dvs 17,7 N nedåt

När vattenytan sammanfaller med det horisontella planet A - B är kraften på segmentytan AGB, $F_{n,1}$, lika med noll (atmosfärstrycket p_0 är ju satt lika med noll). I detta läge blir ΔF , dvs den nedåtriktade kraften på klotet i själva öppningen:

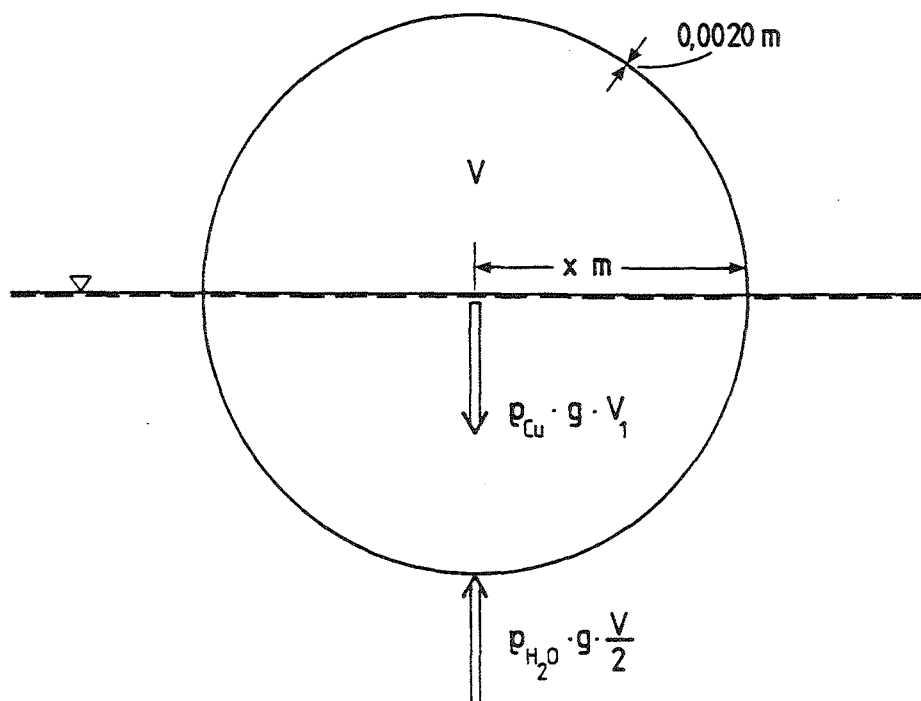
$$\Delta F = F_u - F_{n,2} = 26,69 - 35,17 = -8,48 \text{ N}$$

Vid ytterligare sänkt vattenyta kommer den uppåtriktade kraften, F_u , att minska, varför klotet blir kvar i sitt ursprungliga läge. Uppflytning är alltså omöjlig.

Illustrativt exempel 2.11

Hur stor diameter erfordras hos en sfärisk flottör tillverkad av 2,0 mm tjock kopparplåt ($\rho_{Cu} = 8900 \text{ kg/m}^3$) för att flottören till hälften skall sjunka i vatten ($\rho_{vatten} = 999 \text{ kg/m}^3$)?

Lösning:



I figuren är

V : flottörens volym

V_1 : kopparskalets volym

x : flottörens yttre radie

För jämvikt fordras att

$$\rho_{Cu} \cdot g \cdot V_1 - \rho_{vatten} \cdot g \cdot \frac{V}{2} = 0 \quad [1]$$

Insättning av numeriska värden i formel [1] ger:

$$8900 \cdot g \left(\frac{4\pi \cdot x^3}{3} - \frac{4\pi \cdot (x - 0,002)^3}{3} \right) - 999 \cdot g \cdot \frac{4\pi x^3}{3 \cdot 2} = 0$$

$$8900 \frac{4\pi}{3} \left(x^3 - (x - 0,002)^3 \right) - 999 \frac{4\pi \cdot x^3}{6} = 0$$

$$8900 \cdot x^3 - 8900 \cdot (x - 0,002)^3 - 499,5 \cdot x^3 = 0$$

$$8400,5 \cdot x^3 = 8900 \cdot (x - 0,002)^3$$

$$x \sqrt[3]{8400,5} = \sqrt[3]{8900 \cdot (x - 0,002)}$$

$$x(\sqrt[3]{8900} - \sqrt[3]{8400,5}) = 0,002 \sqrt[3]{89000}$$

$$x = \frac{0,002 \sqrt[3]{8900}}{\sqrt[3]{8900} - \sqrt[3]{8400,5}} \approx 0,1049 \text{ m}$$

Diametern bör vara $2x \approx 0,21 \text{ m}$.

2.9. FLYTSTABILITET

För att ett visst flytläge skall vara stabilt för en flytande kropp fordras att denna efter en liten jämviktsstörning strävar att återgå till just detta läge.

En stillaliggande, flytande kropps jämviktsläge är bestämt av två krafter, nämligen tyngdkraften, G , och lyftkraften (deplacementskraften), D . För stabilitet kräves att detta kraftpar efter en liten jämviktsstörning (krängning) strävar att återföra kroppen till dess ursprungliga flytläge. Detta villkor är uppfyllt i de fall då skärningspunkten mellan å ena sidan deplacementskraftens verkningslinje efter en liten krängning och å den andra sidan den lodräta linjen genom kroppens tyngdpunkt ligger högre än vad kroppens tyngdpunkt gör. Den nämnda skärningspunkten kallas metacentrum. Avståndet i höjddel mellan metacentrum och kroppens tyngdpunkt (i vila), TPK, kallas metacentrumhöjd och betecknas h_m . Vi har alltså

$$h_m = z_m - z_{TPK} \quad (\text{m}) \quad 2.48a$$

där z_m och z_{TPK} betecknar z -koordinaterna för metacentrum respektive för kroppens tyngdpunkt (z -axeln riktad rakt uppåt!)

samt vidare stabiliseringsvillkoret

$$h_m > 0 \quad 2.49$$

Ekvation 2.49 anger alltså det villkor som måste vara uppfyllt för att kroppen efter en liten jämviktsstörning skall återföras till det flytläge som den hade före störningen.

Om $h_m < 0$ är det aktuella flytläget inte stabilt, varför en initierad vridning fortsätter till dess att ett verkligt stabilt läge uppnås.

Ifall $h_m = 0$ föreligger en indifferent stabilitetssituation, kännetecknande t ex en liggande, cirkulär cylinder eller ett klot.

z-koordinaten, z_m , för metacentrum definieras av följande ekvation (z är lika med noll där kroppens lodräta symmetrilinje skär kroppens underkant):

$$z_m = \frac{\rho_v \cdot g \cdot I_o}{G} + z_{TPD} \quad (\text{m}) \quad 2.50$$

där

ρ_v :	Vätskans densitet	(kg/m ³)
g :	Accelerationen vid fritt fall	(m/s ²)
I_o :	Vätskeyteareans minsta tröghetsmoment med avseende på en vridningsaxel genom areans tyngdpunkt	(m ⁴)
z_{TPD} :	z-koordinaten för displacementets tyngdpunkt	(m)
$G = m \cdot g = \rho_k \cdot g \cdot V_k$:	Kroppens tyngd	(N)
m :	Kroppens massa	(kg)
ρ_k :	Kroppens densitet	(kg/m ³)
V_k :	Kroppens volym	(m ³)

Ekvation 2.48a kan nu skrivas

$$h_m = \frac{\rho_v \cdot g \cdot I_o}{G} + z_{TPD} - z_{TPK} = \frac{\rho_v \cdot g \cdot I_o}{G} - (z_{TPK} - z_{TPD})$$

eller

$$h_m = \frac{\rho_v \cdot g \cdot I_o}{G} - e \quad (\text{m}) \quad 2.48b$$

där e alltså är avståndet i z-led mellan kroppens tyngdpunkt (TPK) och displacementets tyngdpunkt (TPD).

Ekvationerna 2.50 och 2.48b anföres här utan bevis. För klarläggande av giltigheten hänvisas till ingenjörsinriktad handbokslitteratur, t ex Cederwall & Larsen (1981).

Illustrativt exempel 2.12

Undersök om en bjälke med bredden (l_1) 0,24 m, tjockleken (l_2) 0,20 m och längden (l_3) 2,40 m kan flyta stabilt med vågrät överyta i följande fall:

- (a) liggande på lågkant (höjd 0,20 m)
- (b) liggande på högkant (höjd 0,24 m)
- (c) stående rätt upp och ner (höjd 2,40 m)

Materialet i bjälken är homogent och har densiteten (ρ_k) 625 kg/m^3 . Den vätska vari bjälken flyter har en densitet av (ρ_v) 1000 kg/m^3 .

Lösning av deluppgift (a):

$$b = l_1 = 0,24 \text{ m}; \quad h = l_2 = 0,20 \text{ m}; \quad L = l_3 = 2,40 \text{ m}$$

Ekvationerna 2.48b och 2.49 postulerar

$$h_m = \frac{\rho_v \cdot g \cdot I_o}{G} - e \quad (\text{m}) \quad (2.48b)$$

$$h_m > 0 \text{ för stabilitet} \quad (2.49)$$

Minsta yttröghetsmoment genom tyngdpunkten av kroppens rektangulära vätskeytearea ("vattenlinjearea" om vätskan är vatten) erhålles vid vridning kring längdaxeln. Detta I_o -värde är

$$I_o = \frac{L \cdot b^3}{12} = \frac{2,40 \times 0,24^3}{12} = \frac{216}{7812} = 2764,8 \cdot 10^{-6} \quad (\text{m}^4)$$

$$G = \rho_k \cdot g \cdot V_k = 625 \times g \times 0,24 \times 2,40 \times 0,20 = 72g \approx 707 \quad \text{N}$$

$$z_{\text{TPK}} = \frac{h}{2} = \frac{0,20}{2} = 0,10 \quad \text{m}$$

Kroppens nedsjunksdjup, z_d , erhålles ur Arkimedes princip

$$\rho_v \cdot g \cdot z_d \cdot b \cdot L = G; \quad z_d = \frac{G}{\rho_v \cdot g \cdot b \cdot L} \quad (\text{m})$$

$$z_d = \frac{72g}{\rho_v \cdot g \cdot b \cdot L} = \frac{72}{\rho_v \cdot b \cdot L} = \frac{72}{1000 \times 0,24 \times 2,40} = 1,125 \quad \text{m}$$

$$z_{\text{TPK}} = \frac{z_d}{2} = \frac{0,125}{2} = 0,0625 \quad \text{m}$$

$$e = z_{\text{TPK}} - z_{\text{TPD}} = 0,10 - 0,0625 = 0,0375 \quad \text{m}$$

Ekvation 2.48b ger nu

$$h_m = \frac{1000 \times g \times 2764,8 \cdot 10^{-6}}{72g} - 0,0375 \quad \text{m}$$

$$h_m = 0,0384 - 0,0375 = 0,0009 \quad \text{m}$$

$$h_m > 0 \Rightarrow \text{flytläget med } h = 0,20 \text{ m är stabilt}$$

Lösning av deluppgift (b):

$$b = l_2 = 0,20 \text{ m}; \quad h = l_1 = 0,24 \text{ m}; \quad L = l_3 = 2,40 \text{ m}$$

Minsta yttröghetsmomentet, I_o , kring längdaxeln genom tyngdpunkten av den rektangulära vätskeytearean $Lb = l_3 l_2$ är

$$I_o = \frac{L \cdot b^3}{12} = \frac{2,40 \times 0,20^3}{12} = 1600 \cdot 10^{-6} \quad (\text{m}^4)$$

$$G = 72g \quad \text{N}$$

$$z_{\text{TPK}} = \frac{h}{2} = \frac{0,24}{2} = 0,12 \quad \text{m}$$

Kroppens nedsjunksdjup, z_d , är i detta fall

$$z_d = \frac{G}{\rho_v \cdot g \cdot b \cdot L} = \frac{72}{\rho_v \cdot b \cdot L} = \frac{72}{1000 \times 0,20 \times 2,40} = 0,15 \quad \text{m}$$

$$z_{\text{TPD}} = \frac{z_d}{2} = \frac{0,15}{2} = 0,075 \quad \text{m}$$

$$e = z_{\text{TPK}} - z_{\text{TPD}} = 0,12 - 0,075 = 0,045 \quad \text{m}$$

$$h_m = \frac{\rho_v \cdot g \cdot I_o}{G} - e = \frac{\rho_v \cdot I_o}{72} - e = \frac{125 \cdot I_o}{9} - e \quad (\text{m})$$

$$h_m = -41/1800 \approx -0,0228 \quad \text{m}$$

$$h_m < 0 \implies \text{flytläget med } h = 0,24 \text{ m är instabilt}$$

Lösning av deluppgift (c):

$$b = l_2 = 0,20 \text{ m}; \quad h = l_3 = 2,40 \text{ m}; \quad L = l_1 = 0,24 \text{ m}$$

Minsta yttröghetsmomentet, I_o , kring längdaxeln genom tyngdpunkten av den rektangulära vätskeytearean $Lb = l_1 l_2$ är

$$I_o = \frac{L \cdot b^3}{12} = 0,00016 \quad (\text{m}^4)$$

$$G = 72g \quad \text{N}$$

$$z_{\text{TPK}} = \frac{h}{2} = \frac{2,40}{2} = 1,20 \quad \text{m}$$

$$z_d = \frac{G}{\rho_v \cdot g \cdot b \cdot L} = \frac{72}{\rho_v \cdot b \cdot L} = \frac{72}{1000 \times 0,20 \times 0,24} = 1,50 \quad \text{m}$$

$$z_{\text{TPD}} = \frac{z_d}{2} = 0,75 \quad \text{m}$$

$$e = z_{\text{TPK}} - z_{\text{TPD}} = 1,20 - 0,75 = 0,45 \quad \text{m}$$

$$h_m = \frac{\rho_v \cdot g \cdot I_o}{G} - e = \frac{\rho_v \cdot I_o}{72} - e = \frac{1000 \times 0,00016}{72} - 0,45 \quad \text{m}$$

$$h_m = 1/450 - 0,45 = -403/900 \approx -0,448 \quad \text{m}$$

$$h_m \ll 0 \implies \text{flytläget med } h = 2,40 \text{ m är mycket instabilt}$$

2.10. FLUIDER UNDER ACCELERATION

2.10.1. Begreppet relativ jämvikt

Det går lätt att beräkna variationer av trycket i fluider i vila, eftersom inga skjuvspänningar förekommer. Skjuvspänningen saknas också i fluider i rörelse, såvida inget skikt rör sig i förhållande till närliggande skikt. En fluid, som rör sig med konstant hastighet, följer därför hydrostatikens lagar för variationer i trycket.

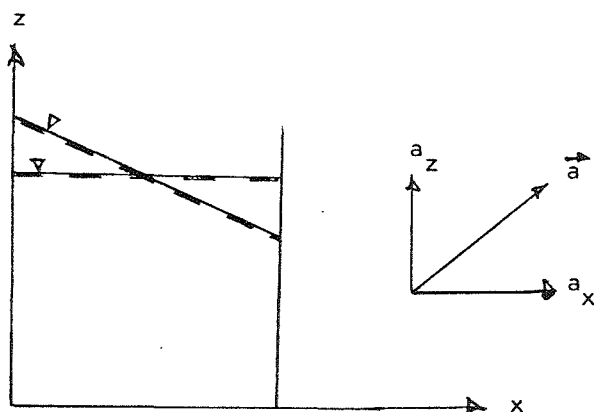
När en fluid accelereras på så sätt att inget lager i fluiden rör sig relativt ett närliggande, dvs när fluiden rör sig som om den vore en fast kropp, uppträder inga skjuvspänningar, och variationerna i trycket kan bestämmas genom tillämpning av Newtons andra lag på en lämpligt vald "fri kropp". Två fall är av intresse, en konstant linjär acceleration och en invariabel rotation kring en vertikal axel. Vid sådana rörelser säges fluiden vara i relativ jämvikt.

2.10.2. Konstant linjär acceleration. Allmänt

Ett öppet kärl, innehållande en fluid, ges en konstant acceleration a (se fig. 2.20).

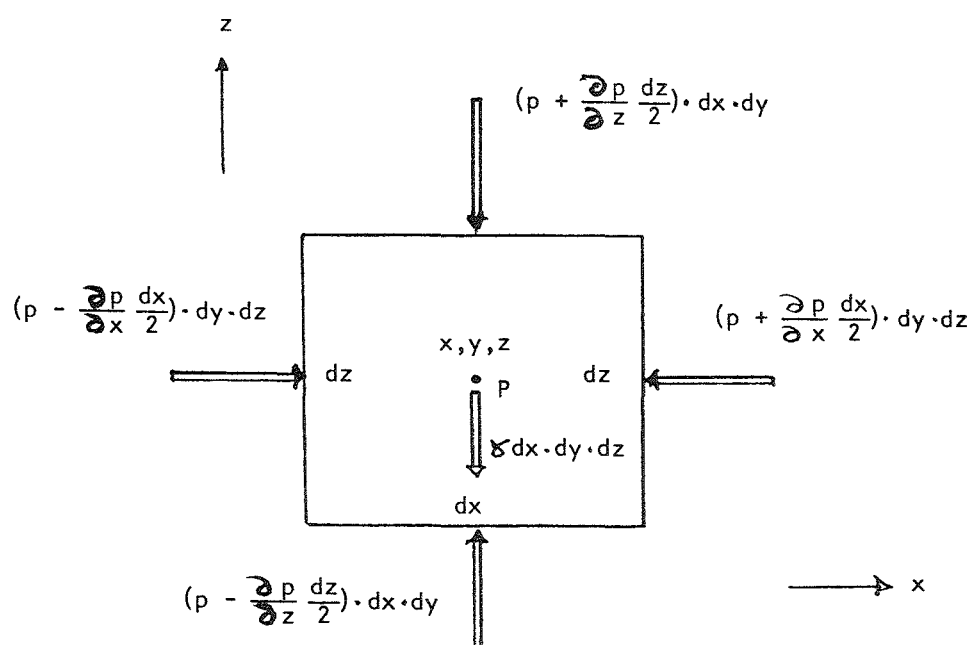
Efter någon tid anpassar sig fluiden till accelerationen, så att den kommer att röra sig som om den vore en fast kropp, dvs avståndet mellan två godtyckligt valda fluidpartiklar är konstant. I detta rörelsetillstånd föreligger alltså inga skjuvspänningar i fluiden.

Genom att välja ett cartesiskt koordinatsystem med z-axeln vertikalt uppåt och x-axeln så riktad att accelerationsvektorn, a , kommer att ligga i xz-planet, åstadkommer man att y-axeln blir normal till a . Av detta följer att det inte existerar någon accelerationskomponent i y-riktningen ($a_y = 0$).



Figur 2.20

Ett fluidelement i form av en infinitesimal, rektangulär parallelepiped med kantlängderna dx , dy , dz jämlöpande med koordinataxlarna studeras som en "fri kropp" (fig. 2.21).



Figur 2.21

Fluidelementets centrum ligger i punkten $(x; y; z)$ och trycket där är p . Vi söker tryckförändringen i x-, y- och z-riktningen. Det är då ändamålsenligt att först söka förändringarna av trycket på det differentiella fluidelementet. Integrering ger sedan tryckvariationen genom fluiden.

Rörelseekvationen för x-riktningen kan skrivas med utgångspunkt från Newtons andra lag

$$\Sigma F_x = m \cdot a_x$$

Vi får

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) \cdot dy \cdot dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) \cdot dy \cdot dz = \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot a_x$$

vilket efter hyfsning ger gränsvärdet (dvs när dx, dy och dz alla går mot noll):

$$\frac{\partial p}{\partial x} = - \rho \cdot a_x \quad 2.51$$

Samma procedur för y-riktningen ($a_y = 0$ till följd av axelvalet) ger

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad 2.52$$

I den vertikala z-riktningen måste hänsyn tas till elementets tyngd, $\rho \cdot g \cdot dx dy dz$. Således

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{2}\right) \cdot dx dy - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{2}\right) \cdot dx dy - \rho \cdot g \cdot dx dy dz = \rho \cdot dx dy dz \cdot a_z$$

Utveckling leder till

$$\frac{\partial p}{\partial z} = - \rho \cdot (g + a_z) \quad 2.53$$

Eftersom p är en lägesfunktion (x;y;z) blir dess fullständiga differential

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz$$

Substitution av de partiella derivatorna enligt ekvationerna 2.51, 2.52 och 2.53 ger

$$dp = - \rho \cdot a_x \cdot dx - \rho \cdot (g + a_z) \cdot dz \quad 2.54$$

Detta uttryck kan integreras för en osammantryckbar fluid. Vi får

$$p = - \rho \cdot a_x \cdot x - \rho \cdot (g + a_z) \cdot z + C$$

Vi sätter

$$x = 0, \quad z = 0 \quad \text{och} \quad p = p_0$$

och får

$$C = p_0.$$

Alltså

$$p = p_0 - \rho \cdot a_x \cdot x - \rho \cdot (g + a_z) \cdot z \quad 2.55$$

Om den accelererande osammantryckbara fluiden har en fri yta kan ytans ekvation fås genom att p sättes lika med noll i ekvation 2.52 (den fria ytan är en nivåyta). Lösning av ekvation 2.52 med avseende på z ger

$$z = \frac{p_0 - p}{\rho \cdot (g + a_z)} - \frac{a_x \cdot x}{g + a_z} \quad 2.56$$

Linjer med konstant tryck ($p = \text{konstant}$) får lutningen

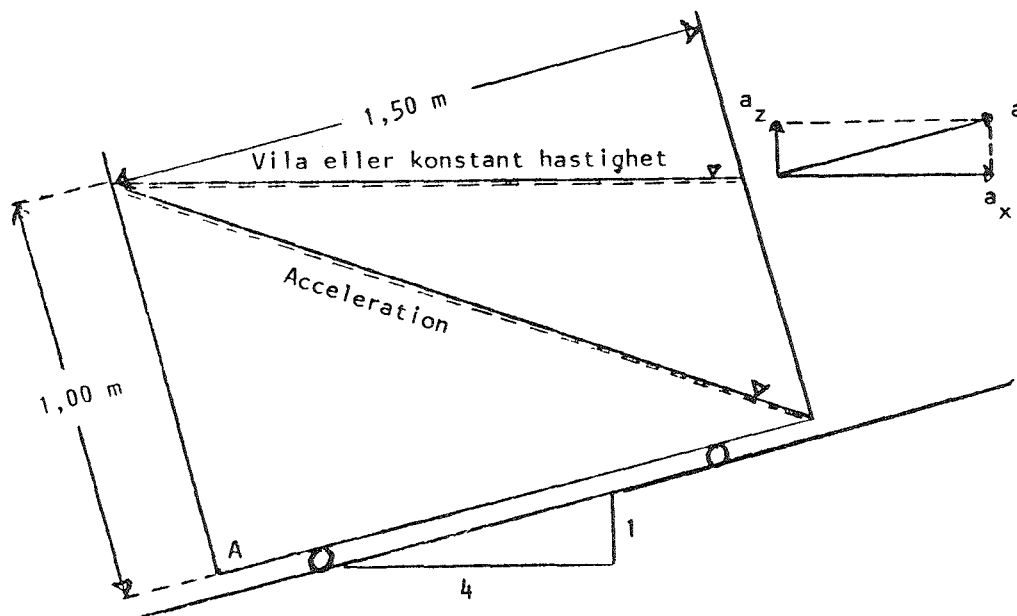
$$\frac{dz}{dx} = - \frac{a_x}{g + a_z} \quad 2.57$$

och är parallella med den fria ytan. Skärningen mellan z -axeln och den fria ytan fås ur ekvation 2.53 för $x = 0$ och $p = 0$

$$z = \frac{p_0}{\rho \cdot (g + a_z)} \quad 2.58$$

Illustrativt exempel 2.13

En öppen behållare fylld med vatten rör sig med konstant acceleration upp- för ett plan. Beräkna den acceleration som fordras för att vattenytan skall inta det läge som nedanstående figur visar. Bestäm trycket, före och under accelerationen, i behållarens hörn vid A. $\rho_{\text{vatten}} = 999 \text{ kg/m}^3$.



Lösning: Ur geometrien fås att vattenytans lutning under accelerationen är $-5/14 \approx -0,357$. Från planets lutning erhålles att $a_x = 4a_z$. Med användning av ekvation 2.57

$$\frac{dz}{dx} = - \frac{a_x}{a_z + g} \quad (2.57)$$

erhålles

$$\frac{dz}{dx} = - \frac{4a_z}{a_z + 9,82} = - \frac{5}{14}$$

Vi får:

$$a_z = 0,963 \text{ m/s}^2; \quad a_x = 3,851 \text{ m/s}^2; \quad a = 3,969 \text{ m/s}^2.$$

Ur geometrien fås också att vattendjupet vertikalt ovanför hörnet A före accelerationen är $4 \cdot \sqrt{17}/17 \approx 0,970 \text{ m}$, varför trycket där är $999 \times 9,82 \times 0,970 = 9517 \text{ N/m}^2 = 9,517 \text{ kPa}$. Efter accelerationen blir vattendjupet $3 \cdot \sqrt{17}/14 \approx 0,8835 \text{ m}$. Ekvation 2.53,

$$\frac{\partial p}{\partial z} = - \rho \cdot (g + a_z), \quad (2.53)$$

ger då

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial z} &= - 999 \cdot (9,82 + 0,963) = - 10772 \text{ N/m}^3 = \\ &= - 10,77 \text{ kN/m}^3 \end{aligned}$$

Integrering ger

$$p = \int_0^p dp = - \int_0^{-0,8835} 10772 \cdot dz$$

$$\begin{aligned} p &= - 10772 \left[z \right]_0^{-0,8835} = - (- 10772 \times 0,8835) = 9517 \text{ N/m}^2 = \\ &= 9,52 \text{ kPa} \end{aligned}$$

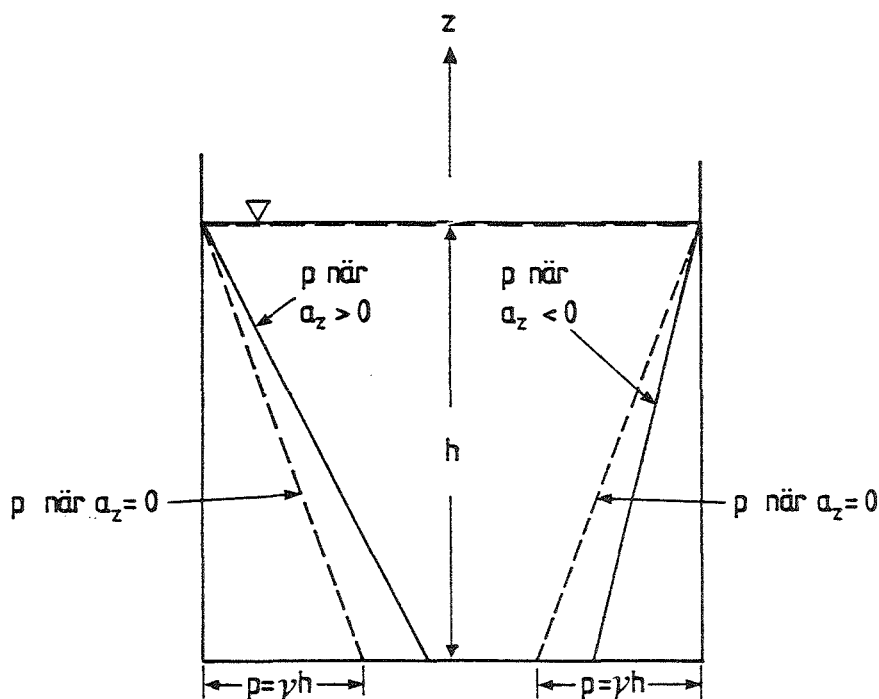
Att trycket vid A är detsamma under accelerationen som före är ingen tillfällighet. Det kan visas att P_A inte ändras med accelerationen. Det betyder att kraften som verkar på vattnet i behållarens ända, är konstant för alla accelerationer. Detta motsäger inte Newtons andra lag, eftersom vätskemassan minskar med ökad acceleration, så att produkten av massa och acceleration förblir konstant och lika med den anbringade kraften.

2.10.3. Konstant acceleration rakt uppåt eller nedåt

Här antas en vätskefylld behållare bli accelererad i vertikal riktning ($\partial p / \partial x = 0$). Med oförändrat tryck med avseende på x har vi enligt ekvation 2.53

$$\frac{dp}{dz} = - \rho \cdot (g + a_z) \quad (2.53)$$

Ekvationen visar att den karakteristiska linjära hydrostatiska tryckvariationen bibehålles vid konstant a_z , men att tryckets storlek är beroende av värdet på a_z . De kvantitativa effekterna av detta förhållande framgår av figur 2.22 där tryckfördelningarna visas för $a_z = 0$, för $a_z > 0$ och för $a_z < 0$. Det sistnämnda fallet är av särskilt intresse när $a_z = -g$, som ger $dp/dz = 0$, dvs medför att trycket kommer att vara konstant (oberoende av djupläget) inom en fritt fallande fluidmassa.



Figur 2.22. Schematiskt diagram över tryckfördelningarna vid olika värden på den vertikala accelerationen, a_z

Överallt i en icke avgränsad, fritt fallande fluidmassa kommer trycket att bli lika med det i omgivningen rådande trycket. Om trycket i omgivningen är noll, kommer trycket i alla punkter i fluidmassan att vara noll.

Illustrativt exempel 2.14

En öppen behållare med vatten accelereras vertikalt uppåt med $6,00 \text{ m/s}^2$. Beräkna trycket på djupet $2,00 \text{ m}$. $\rho_{\text{vatten}} = 999 \text{ kg/m}^3$.

Lösning: Ekvation 2.54

$$dp = -\rho \cdot a_x \cdot dx - \rho \cdot (g + a_z) \cdot dz \quad (2.54)$$

ger för

$$a_x = 0 \quad \text{och} \quad a_z = 6,00 \text{ m/s}^2$$

$$\begin{aligned} dp &= -999 \cdot (9,82 + 6,00) \cdot dz = -15804 \cdot dz \text{ N/m}^2 = \\ &= -15,804 \cdot dz \text{ kN/m}^2 \end{aligned}$$

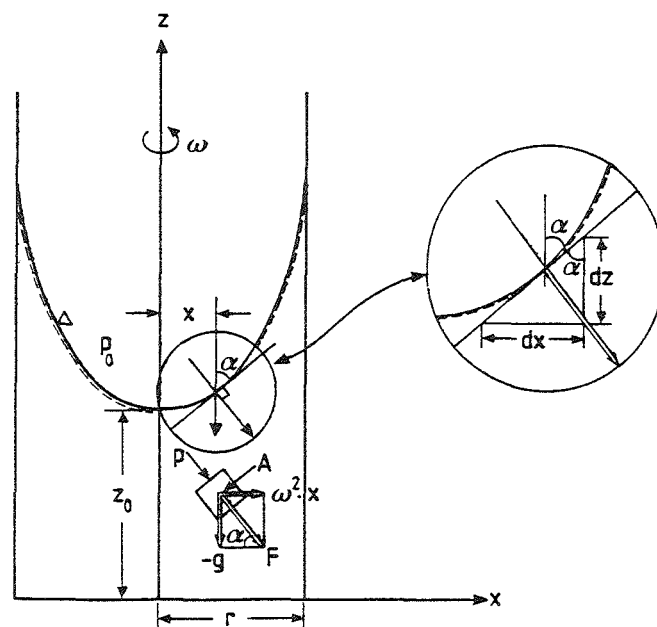
$$p = - \int_0^p dp = - \int_0^{-2,00} 15,804 \cdot dz$$

$$p = -15,804 \left[z \right]_0^{-2,00} = -15,804 \cdot (-2,00) = 31,6 \text{ kPa}$$

2.10.4. Centripetal acceleration

Här skall endast behandlas centripetal acceleration med konstant vinkelhastighet kring en vertikal axel och med $a_z = 0$.

Såsom tidigare nämnts är förutsättningen för att tangentialkrafter icke skall uppträda i en vätska, att det ej förekommer någon relativ rörelse mellan vätskepartiklarna eller mellan vätskepartiklarna och vätskans begränsningsytor. Är denna förutsättning uppfylld kan hydrostatikens grund-ekvation, ekvation 2.6 (s. 2:3), tillämpas även om vätskan utsätts för centripetal acceleration (fig. 2.23).



Figur 2.23

I den situation som figur 2.23 visar antages ett vertikalt cylindriskt kärl - till en del fyllt med vätska - rotera kring sin centrumaxel. Såväl kärlet som vätskan har konstant vinkelhastighet, ω . Vid jämvikt påverkas ett vätskeelement i punkten A per massenhet dels av normalaccelerationen, $\omega^2 \cdot x$ (se Bihang 2.1), dels av tyngdkraftsaccelerationen, g . Ekvation 2.6

$$dp = \rho \cdot X \cdot dx + \rho \cdot Y \cdot dy + \rho \cdot Z \cdot dz \quad (2.6)$$

ger då för

$$X = \omega^2 \cdot x$$

$$Y = 0$$

$$Z = -g$$

$$dp = \rho \cdot \omega^2 \cdot x \cdot dx - \rho \cdot g \cdot dz \quad 2.59$$

I vätskeytan är trycket konstant. Därav följer att $dp = 0$ (nivåyta) och att vätskeytans differentialekvation blir:

$$\omega^2 \cdot x \cdot dx - g \cdot dz = 0$$

eller

$$dz = \frac{\omega^2 \cdot x}{g} dx \quad 2.60$$

Vi integrerar mellan gränserna z_0 och z respektive 0 och r och erhåller

$$z - z_0 = \frac{\omega^2 \cdot r^2}{2g}$$

eller

$$z = z_0 + \frac{\omega^2 \cdot r^2}{2g} \quad 2.61$$

Eftersom vätskeytan är en nivåyta kan ekvation 2.60 också fås ur villkoret, att den i figur 2.23 angivna kraften F måste vara vinkelrät mot vätskeytan. Vi kan skriva

$$\tan \alpha = \frac{dx}{dz} = \frac{g}{\omega^2 \cdot x} \quad 2.62$$

Tryckfördelningen i vätskan erhålles ur ekvation 2.59

$$dp = \rho \omega^2 \cdot x \cdot dx - \rho \cdot g \cdot dz \quad (2.59)$$

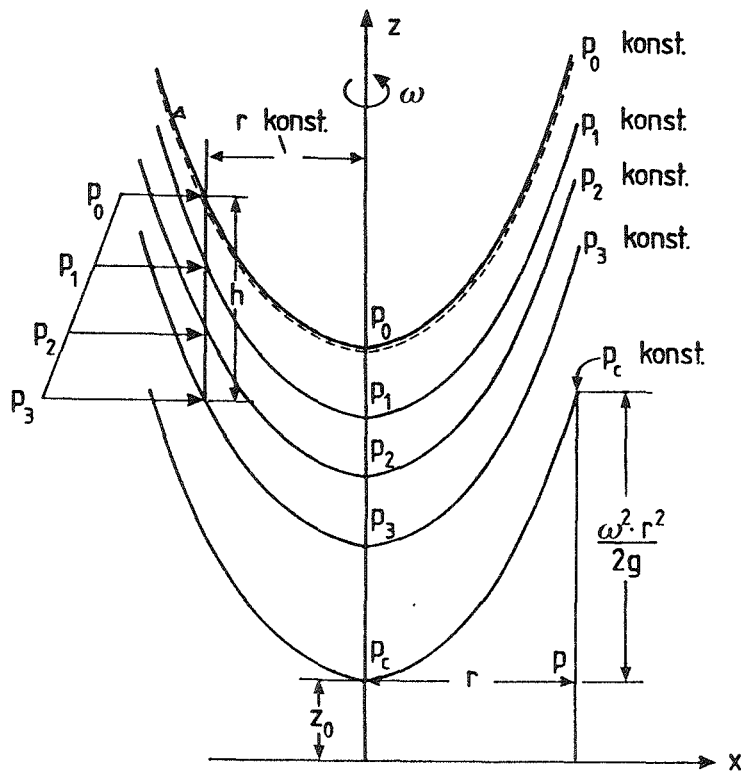
Integrering mellan gränserna p_0 och p (det sistnämnda ofta lika med atmosfärstrycket), 0 och r respektive z_0 och z ger

$$p = p_0 + \frac{\rho \cdot \omega^2 \cdot r^2}{2} - \rho \cdot g \cdot (z - z_0) \quad 2.63$$

En partiell derivering med avseende på z ger ekvationen

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho \cdot g \quad 2.64$$

vilken anger att tryckfördelningen är hydrostatisk, dvs att trycket i vätskan stiger linjärt med vertikala avståndet från vätskeytan. Detta framgår också av figur 2.24, där $p_3 - p_0 = \rho \cdot g \cdot h$.



Figur 2.24

För konstant $z = z_0$ blir ekvation 2.59 (jfr fig. 2.24)

$$dp = \rho \cdot \omega^2 \cdot x \cdot dx$$

Vi integrerar detta uttryck från rotationsaxeln, där x är lika med noll och trycket lika med p_c , till en godtycklig radie, r , där trycket är p

$$\int_{p_c}^p dp = \rho \cdot \omega^2 \int_0^r x \cdot dx$$

dvs

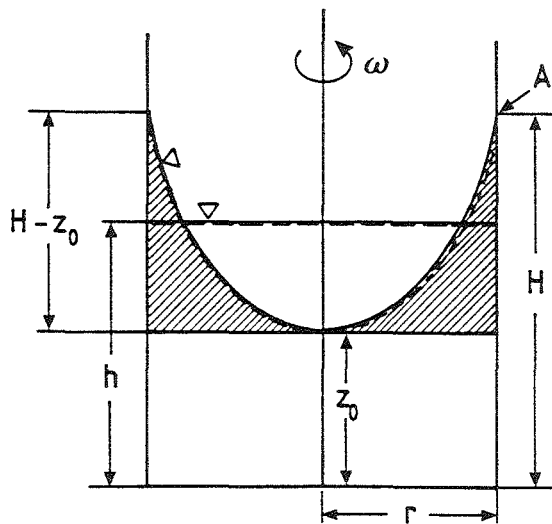
$$p - p_c = \frac{\rho \cdot \omega^2 \cdot r^2}{2} \quad 2.65a$$

som kan skrivas

$$\frac{p - p_c}{\rho \cdot g} = \frac{\omega^2 \cdot r^2}{2g} \quad 2.65b$$

Ekvationerna 2.65a och 2.65b visar att det går att åstadkomma tryck genom att försätta en fluidmassa i rotation. Principen utnyttjas bl a i centrifugalpumpar för att åstadkomma en tryckdifferens och därigenom få en fluid att strömma.

Det kan visas att volymen av en rotationsparaboloid är hälften av den omskrivna cylinderns volym.



Figur 2.25

En vätska roterar i ett cylindriskt kärl enligt figur 2.24. Före rotationen är uttrycket på vätskans volym $\pi \cdot r^2 \cdot h$. Efter inträdd rotation och uppnådd jämvikt kan den omskrivna cylinderns volym tecknas $\pi \cdot r^2 \cdot (H - z_0)$. Eftersom volymen av en rotationsparaboloid är hälften av den omskrivna cylinderns volym, så måste volymen mellan den omskrivna cylindern och rotationsparaboloiden också vara hälften av den omskrivna cylinderns volym. Vi kan därför skriva

$$\pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot z_0 + \frac{1}{2} \pi \cdot r^2 \cdot (H - z_0)$$

Eliminering och inmultiplikering ger

$$h = z_0 + \frac{H}{2} - \frac{z_0}{2} = \frac{H}{2} + \frac{z_0}{2}$$

dvs

$$2h = H + z_o$$

som kan skrivas

$$H - h = h - z_o \quad 2.66$$

Alltså: Vid rotation i ett cylindriskt kärl stiger vätskan lika mycket vid kärlkanten som den sjunker i centrum räknat från utgångsnivån.

I enlighet med ekvation 2.61 gäller för punkten A i figur 2.25

$$H = z_o + \frac{\omega^2}{2g} r^2 \quad 2.67$$

Kombineras ekvation 2.67 med sambandet

$$2h = H + z_o,$$

vilket kan skrivas

$$H = 2h - z_o,$$

fås

$$2h - z_o = z_o + \frac{\omega^2}{2g} r^2$$

eller

$$h - z_o = \frac{\omega^2}{4g} r^2 \quad 2.68$$

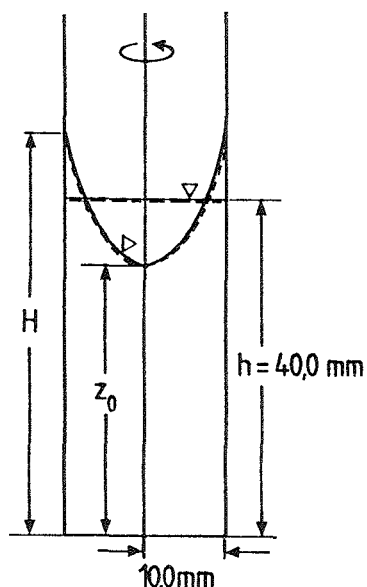
Sänkningen respektive uppressningen i förhållande till utgångsläget blir alltså

$$\frac{\omega^2}{4g} r^2 \quad 2.69$$

Illustrativt exempel 2.15

Ett cylindriskt kärl (se figuren på nästa sida) med diametern 20,0 mm är till höjden 40,0 mm över botten fyllt med vatten. Hur högt stiger vattnet vid kärlväggen räknat från kärlets botten vid en rotationshastighet av 615 varv/min? Kärlet förutsättes vara så högt att inget vatten slungas ut vid rotationen.

Lösning: Vi har sambanden



$$H = z_0 + \frac{\omega^2}{2g} r^2 \quad [1]$$

och

$$H - h = h - z_0$$

eller

$$z_0 = 2h - H \quad [2]$$

Insättning av formel [2] i formel [1] ger

$$H = h + \frac{\omega^2}{4g} r^2 \quad [3]$$

där $h = 0,0400 \text{ m}$; $r = 0,0100 \text{ m}$ och $g = 9,82 \text{ m/s}^2$

Dessutom har vi att

$$\omega = 615 \text{ varv/min} = \frac{615 \times 2\pi}{60} \text{ rad/s} = 20,5 \pi \text{ rad/s}$$

Efter insättning av numeriska värden i formel [3] får vi:

$$\underline{H} = 0,0400 + \frac{20,5^2 \times \pi^2}{4 \times 9,82} 0,0100^2 = 0,0400 + 0,0106 = \underline{0,0506 \text{ m}}$$

2.11. OMNÄMND LITTERATUR

d'Alembert, J. 1752. Essai de la résistance des fluides. Paris.

Cederwall, K. & Larsen, P. 1981. Hydraulik för väg- och vattenbyggare, uppl. 2:2. Malmö: LiberLäromedel.

Euler, L. 1755. Principes généraux de l'état de l'équilibre des fluides. Mémoires der Berliner Academie der Wissenschaften 11.

Huygens, C. 1728. Dissertatio de causa gravitatis. Amsterdam.

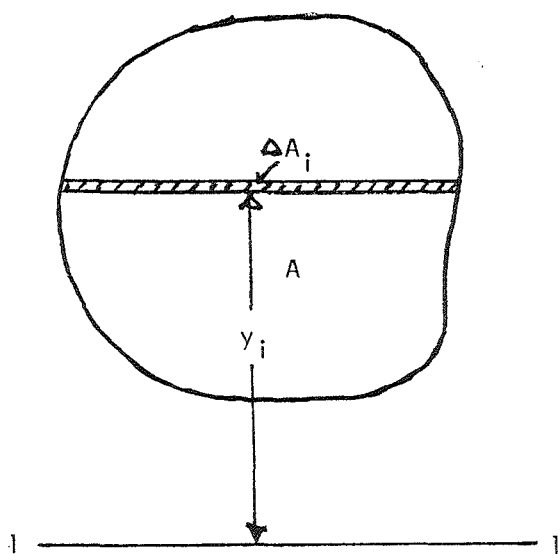
Pascal, B. 1658. Traité de l'équilibre des liqueurs et de la pesanteur de la masse de l'air. Paris.

Sandsborg, J. & Bjerketorp, A. 1993. Kompendium i agronomisk hydromekanik. 1: Grundläggande begrepp, 2:a uppl. - Sveriges Lantbruksuniversitet, Uppsala. Avd. för lantbrukets hydroteknik. Avdelningsmeddelande 88:4 (1:a uppl. 1988).

2.12. BIHANG 2.1: NÅGOT OM PLANA YTORS MOMENT M M

2.12.1. Moment och tyngdpunkter för plana ytor

En ytas moment kan bestämmas på samma sätt som man bestämmer det statistiska momentet, dvs en krafts moment kring en godtyckligt vald axel. Momentet med avseende på en linje $a \rightarrow b$ för en plan yta med arean A kan då härledas på följande sätt (se fig. 2.26):



Figur 2.26

1. Dela ytan i n strimlor genom att dra linjer parallella med linjen $a \rightarrow b$. Beteckna strimlornas areor med $\Delta A_1, \Delta A_2, \dots, \Delta A_n$
2. Multiplicera ytan av varje strimla med avståndet mellan strimlan och linjen $a \rightarrow b$ och addera de erhållna värdena. Med avstånden betecknade y_1, y_2, \dots, y_n fås summan

$$\sum_{i=1}^{i=n} (y_i \cdot \Delta A_i)$$

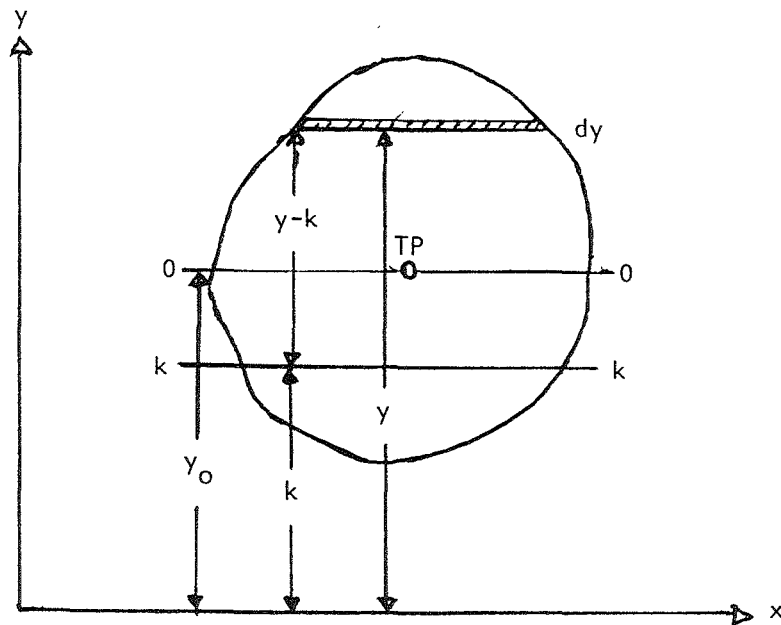
3. Bestäm gränsvärdet för denna summa, när varje strimmas bredd går mot noll genom att n går mot oändligheten. Detta gränsvärde är det sökta momentet. Betecknar vi det med M_{ab} fås

$$M_{ab} = \lim_{\Delta A_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{i=n} (y_i \cdot \Delta A_i) = \int_A y \cdot dA \quad 2.70$$

Här betecknar dA ett differentiellt areaelement av ytan A , dvs en differentiell strimla parallell med linjen $a \rightarrow b$. I allmänhet hänföres den givna arean till ett koordinatsystem och dess moment beräknas då i förhållande till koordinataxlarna.

Vid bestämning av momentet kring en med x -axeln parallell axel, på t ex avståndet $y = k$ (fig. 2.27), fås

$$M_k = \int_A (y - k) \cdot dA = \int_A y \cdot dA - k \int_A dA$$



Figur 2.27

som vid integrering över ytan A ger

$$M_{lk} = \int y \cdot dA - k \cdot A \quad 2.71$$

På ett avstånd av $y = k = y_0$ från x-axeln existerar alltid en parallell axel kring vilken ytmomentet är lika med noll. Denna axel kallas en tyngdpunktsaxel med avseende på x-axeln.

Ekvationen för en tyngdpunktsaxel parallell med x-axeln erhålles genom att ekvation 2.71 sättes lika med noll (och $k = y_0$).

Alltså:

$$\int y \cdot dA - y_0 \cdot A = 0$$

eller

$$y_0 \cdot A = \int_A y \cdot dA \quad 2.72$$

Ekvation 2.72 kan i ord formuleras: Det helas moment är lika med summan av delarnas moment.

Vi kan också definiera y-koordinaten för ytans tyngdpunkt

$$y_0 = \frac{1}{A} \int_A y \cdot dA \quad 2.73$$

Ekvationen för en tyngdpunktsaxel parallell med y-axeln blir analogt

$$x_o \cdot A = \int_A x \cdot dA \quad 2.74$$

och x-koordinaten för ytans tyngdpunkt

$$x_o = \frac{1}{A} \int_A x \cdot dA \quad 2.75$$

En vridning av axlarna visar, att ytmomentet blir lika med noll för en godtycklig axel genom tyngdpunkten.

Har en yta en symmetriaxel blir denna en tyngdpunktsaxel, eftersom korresponderande ytelements moment på ömse sidor om axeln är lika till storleken men har motsatta tecken.

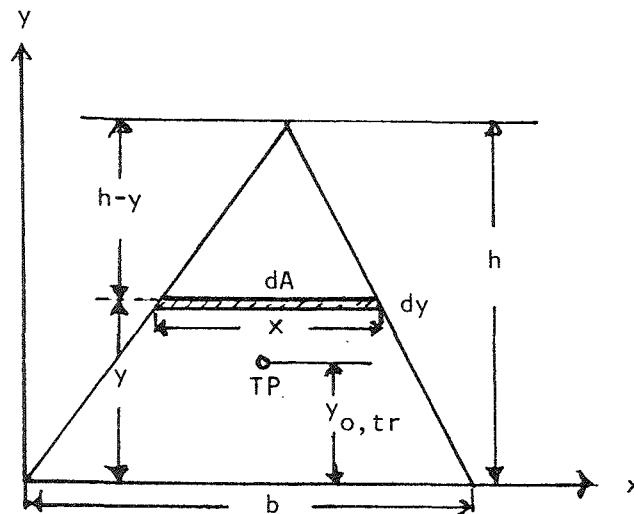
Är tyngdpunktens koordinater kända, kan ytmomentet för en godtycklig axel utan integrering fås ur ekvationerna 2.72 och 2.74

Illustrativt exempel 2.16 (s. 2:59 - 2:64)

Sök tyngdpunktens y-koordinat för (a) en triangelyta, (b) en kvartscirkelyta och (c) en halvcirkelyta, alla placerade på positiva y-axelns sida och med en rät sida sammanfallande med x-axeln.

Lösning:

(a) TRIANGELYTAN



Om y_o i ekvation 2.72 sättes lika med $y_{o,tr}$, har vi att

$$y_{o,tr} \cdot A = \int_A y \cdot dA$$

Ur figuren fås att

$$A = \frac{b \cdot h}{2} \quad \text{liksom att} \quad dA = x \cdot dy.$$

Ur likformigheten fås också att

$$\frac{h - y}{x} = \frac{h}{b} \quad \text{dvs att} \quad x = \frac{b \cdot (h - y)}{h}$$

Ekvation 2.72 kan då skrivas

$$\frac{y_{o, tr} \cdot b \cdot h}{2} = \int_0^h \frac{y \cdot b \cdot (h - y)}{h} dy = \frac{b}{h} \int_0^h y \cdot (h - y) \cdot dy$$

$$\frac{y_{o, tr} \cdot h}{2} = \int_0^h y \cdot dy - \frac{1}{h} \int_0^h y^2 \cdot dy$$

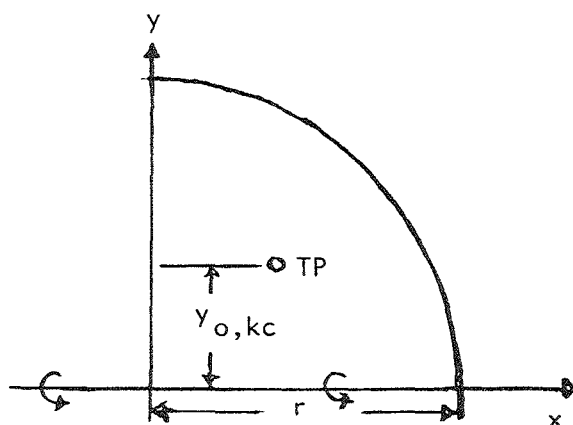
$$\frac{y_{o, tr} \cdot h}{2} = \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^h - \frac{1}{h} \cdot \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^h$$

$$\frac{y_{o, tr} \cdot h}{2} = \frac{h^2}{2} - \frac{1}{h} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{h^2}{6} ; \quad y_{o, tr} = \frac{h}{3}$$

Tyngdpunktens y-koordinat för en triangelyta med en sida (basen) sammanfallande med x-axeln är alltså $h/3$, vilket innebär att tyngdpunkten ligger på avståndet $h/3$ från triangelns bas.

(b) KVARTSCIRKELYTAN

Härledningsmetod 1 (Med hjälp av Guldins 2:a regel)



Kvartscirkelytans tyngdpunktsavstånd från diametern bestäms enklast genom tillämpning av Guldins andra regel (uppkallad efter den schweiziske

matematikern Paul Guldin, 1577 - 1643), som säger att en rotationskropps volym är lika med generatrisytan (den roterande ytan) gånger den väglängd som denna ytas tyngdpunkt tillryggalagt under rotationen.

För kvartscirkelytan gäller (jfr figuren på föregående sida):

$$\text{Rotationskroppens volym: } \frac{4\pi \cdot r^3}{6}$$

$$\text{Generatrisytan för en kvartscirkel: } \frac{\pi \cdot r^2}{4}$$

$$\text{Tyngdpunktens förflyttningsväg: } 2\pi \cdot y_{o,kc}$$

Den återopade regeln ger således

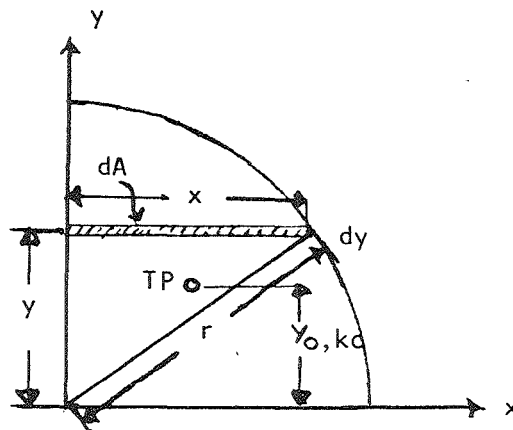
$$\frac{4\pi \cdot r^3}{6} = \frac{\pi \cdot r^2}{4} \cdot 2\pi \cdot y_{o,kc}$$

eller

$$y_{o,kc} = \frac{4r}{3\pi}$$

Tyngdpunktens y-koordinat för en kvartscirkelyta med en av de räta sidorna sammanfallande med x-axeln är alltså $4r/(3\pi)$.

Härledningsmetod 2 (Integrering)



Med stöd av figuren ovan kan vi teckna

$$y_{o,kc} \cdot A = \int y \cdot dA = \int y \cdot x \cdot dy = \int y \sqrt{r^2 - y^2} \cdot dy$$

I integralen sättes

$$\sqrt{r^2 - y^2} = \sqrt{u}$$

Vi får

$$u = r^2 - y^2$$

$$du = -2y \cdot dy$$

eller

$$y \cdot dy = -\frac{du}{2}$$

Vi kan då skriva

$$y_{o,kc} \cdot A = \int y \sqrt{r^2 - y^2} \cdot dy = -\frac{1}{2} \int \sqrt{u} \cdot du = -\frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{2}} \cdot du$$

Vi får följande integrationsgränser

$$\text{För } y = 0 \quad \text{är } u = r^2$$

$$\text{För } y = r \quad \text{är } u = 0$$

Då erhålles

$$y_{o,kc} \cdot A = -\frac{1}{2} \left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_{r^2}^0 = -\frac{1}{3} \left[u^{\frac{3}{2}} \right]_{r^2}^0 = -\frac{1}{3} \left(0 - r^{\frac{2 \cdot 3}{2}} \right)$$

$$y_{o,kc} \cdot A = \frac{r^3}{3}$$

Men eftersom

$$A = \frac{\pi \cdot r^2}{4}$$

får vi

$$y_{o,kc} \frac{\pi \cdot r^2}{4} = \frac{r^3}{3} \quad \text{och} \quad y_{o,kc} = \frac{r^3}{3} \cdot \frac{4}{\pi \cdot r^2},$$

dvs

$$y_{o,kc} = \frac{4r}{3\pi}$$

liksom vid härledning med Guldins andra regel.

Härledningsmetod 3 (Trigonometrisk substitution)

Ytterligare ett sätt att beräkna tyngdpunktens y-koordinat är att använda sk trigonometrisk substitution. Exempel på tillämpning av denna beräkningsmetod ges i det följande.

(c) HALVCIRKELYTANHärledningsmetod 1

$$\text{Rotationskroppens volym: } \frac{4\pi \cdot r^3}{3}$$

$$\text{Generatrisytan för en halvcirkel: } \frac{\pi \cdot r^2}{2}$$

$$\text{Tyngdpunktens förflyttningsväg: } 2\pi \cdot y_{o, hc}$$

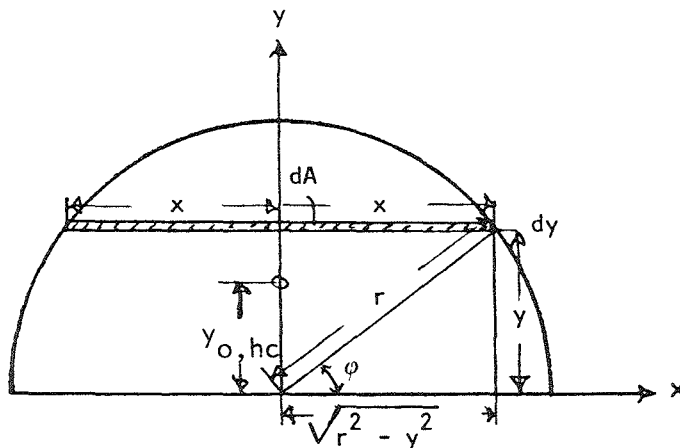
Guldins andra regel ger:

$$\frac{4\pi \cdot r^3}{3} = \frac{\pi \cdot r^2}{2} \cdot 2\pi \cdot y_{o, hc}$$

eller

$$y_{o, hc} = \frac{4r}{3\pi}$$

y-koordinaten för tyngdpunkten av en halvcirkelyta med diametern utefter x-axeln är alltså densamma som y-koordinaten för tyngdpunkten av en kvartscirkelyta med en av sina rätta sidor längs x-axeln, dvs $4r/(3\pi)$.

Härledningsmetod 3 (Trigonometrisk substitution)

Med stöd av figuren kan vi teckna

$$y_{o, hc} \cdot A = \int y \cdot dA ; \quad dA = 2x \cdot dy ; \quad x = \sqrt{r^2 - y^2}$$

som ger

$$y_{o, hc} \cdot A = 2 \int y \sqrt{r^2 - y^2} \cdot dy \quad [1]$$

Vi kan skriva

$$y = r \cdot \sin \varphi ; \quad dy = r \cdot \cos(\varphi) \cdot d\varphi$$

$$\sqrt{r^2 - y^2} = r \cdot \cos \varphi$$

Insättning av detta i formel [1] ger

$$\begin{aligned} y_{o,hc} \cdot A &= 2 \int r \cdot \sin(\varphi) \cdot r \cdot \cos(\varphi) \cdot r \cdot \cos(\varphi) \cdot d\varphi \\ y_{o,hc} \cdot A &= 2r^3 \int \cos^2 \varphi \cdot \sin(\varphi) \cdot d\varphi \end{aligned} \quad [2]$$

Substitution av $\cos \varphi$ i formel [2] med z ger i sin tur

$$z = \cos \varphi ; \quad dz = - \sin(\varphi) \cdot d\varphi .$$

Insättning i formel [2] ger

$$y_{o,hc} \cdot A = - 2r^3 \int z^2 \cdot dz$$

Vi integrerar och får

$$y_{o,hc} \cdot A = - 2r^3 \frac{z^3}{3} = - \frac{2r^3}{3} z^3$$

Återinsättning av $z = \cos \varphi$ och införande av integrationsgränserna 0 och $\pi/2$ rad ger

$$y_{o,hc} \cdot A = \frac{2r^3}{3} \left[\cos^3 \varphi \right]_0^{\pi/2} = - \frac{2r^3}{3} (0 - 1) = \frac{2r^3}{3}$$

$$\text{För} \quad A = \frac{\pi \cdot r^2}{2} \quad \text{fås} \quad y_{o,hc} \frac{\pi \cdot r^2}{2} = \frac{2r^3}{3} ,$$

$$\text{dvs} \quad y_{o,hc} = \frac{4r}{3\pi}, \quad \text{liksom vid härledningen med Guldins andra regel.}$$

Eftersom cirkeln kan betraktas som ett specialfall av ellipsen kan det nämnas att y-koordinaten för tyngdpunkten av en halvellipsyta med storaxeln (b) utmed x-axeln är $2a/(3\pi)$. Är det lillaxeln (a) som ligger utmed x-axeln definieras y-koordinaten med uttrycket $2b/(3\pi)$.

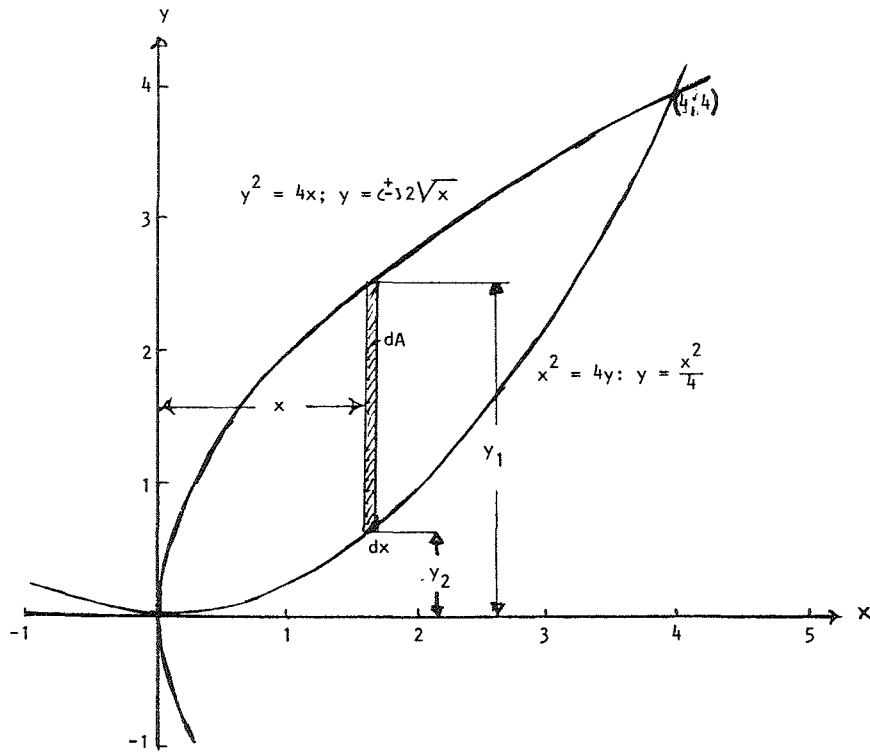
Illustrativt exempel 2.17 (s. 2:64 - 2:67)

Sök (första) momenten för den yta som begränsas av kurvorna $y^2 = 4x$ och $x^2 = 4y$, dels (a) med avseende på y-axeln, dels (b) med avseende på x-axeln. Bestäm också (c) ytans tyngdpunktskoordinater.

Lösning av 2.17 a:

Enligt figuren på nästa sida har vi att

$$\begin{aligned} dA &= (y_1 - y_2) \cdot dx \\ dA &= \left(2\sqrt{x} - \frac{x^2}{4} \right) \cdot dx \end{aligned} \quad [1]$$



Multiplikeras båda leden i formel [1] med x fås

$$x \cdot dA = x \cdot \left(2\sqrt{x} - \frac{x^2}{4} \right) \cdot dx$$

Vi kan nu skriva

$$M_y = \int_0^4 x \cdot dA = \int_0^4 x \cdot \left(2\sqrt{x} - \frac{x^2}{4} \right) \cdot dx$$

$$M_y = 2 \int_0^4 x^{\frac{3}{2}} \cdot dx - \frac{1}{4} \int_0^4 x^3 \cdot dx$$

$$M_y = 2 \left[\frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}} \right]_0^4 - \frac{1}{4} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^4 = \frac{4}{5} \left[\sqrt{x^5} \right]_0^4 - \frac{1}{16} \left[x^4 \right]_0^4$$

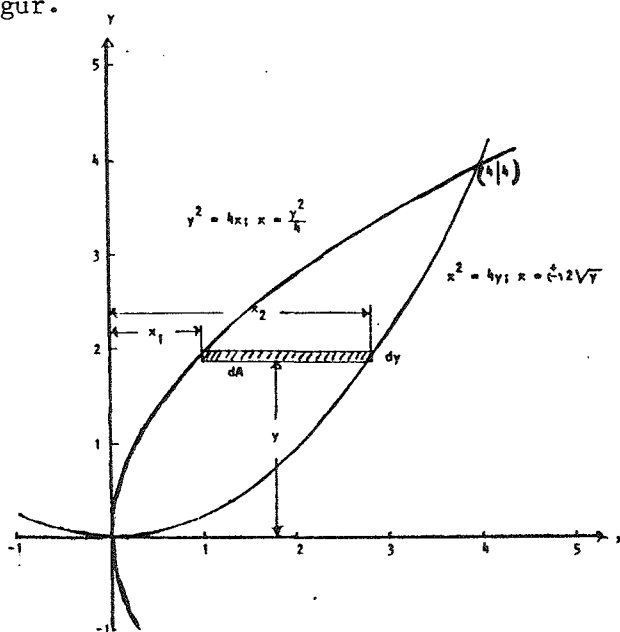
$$M_y = \frac{4 \cdot 32}{5} - \frac{256}{16} = \frac{128}{5} - \frac{80}{5} = \frac{48}{5} \quad (\text{m}^3)$$

Svar till 2.17 a:

Ytans (första) moment med avseende på y -axeln är $48/5 \quad (\text{m}^3)$

Lösning av 2.17 b:

För ytmomentet med avseende på x-axeln, M_x , gäller analogt enligt nedanstående figur.



$$dA = (x_2 - x_1) \cdot dy = \left(2\sqrt{y} - \frac{y^2}{4}\right) \cdot dy$$

$$dA = \left(2\sqrt{y} - \frac{y^2}{4}\right) \cdot dy \quad [2]$$

Multiplikeras båda leden i formel [2] med y fås

$$y \cdot dA = y \cdot \left(2\sqrt{y} - \frac{y^2}{4}\right) \cdot dy$$

$$M_x = \int_0^4 y \cdot dA = \int_0^4 y \cdot \left(2\sqrt{y} - \frac{y^2}{4}\right) \cdot dy$$

som ger

$$M_x = 48/5 \quad (\text{m}^3)$$

Svar till 2.17 b:

Ytans (första) moment med avseende på x-axeln är $48/5 \text{ (m}^3\text{)}$

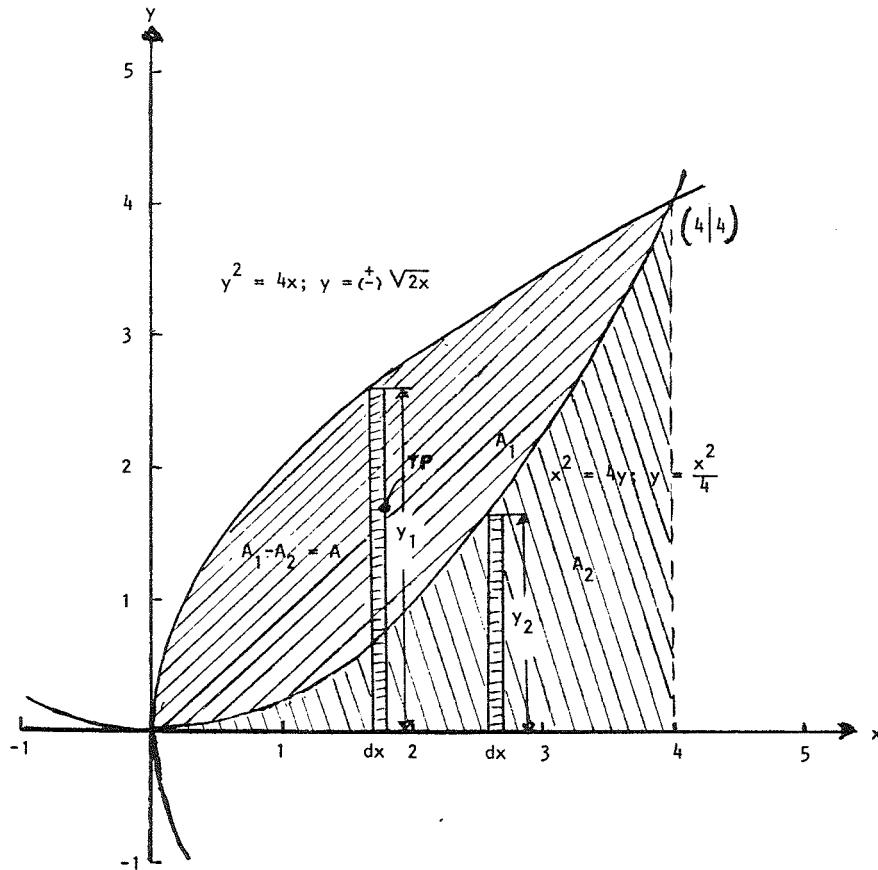
Lösning av 2.17 c:

För y_0 gäller (jfr ekvation 2.73 på s. 2:58)

$$y_0 = \frac{1}{A} M_x = \frac{1}{A} \int_A y \cdot dA \quad [3]$$

Beträffande arean, A , mellan kurvorna så är det så att denna är lika med arean, A_1 , under kurvan $y^2 = 4x$, minus arean, A_2 , under kurvan $x^2 = 4y$.

Alltså: $A = A_1 - A_2$



A_1 och A_2 fås genom integrering

$$A = A_1 - A_2 = \int_0^4 y_1 \cdot dx - \int_0^4 y_2 \cdot dx$$

$$A = 2 \int_0^4 \frac{1}{x^2} \cdot dx - \frac{1}{4} \int_0^4 x^2 \cdot dx$$

$$A = 2 \left[\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} \right]_0^4 - \frac{1}{4} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^4 = \frac{4}{3} \left[\sqrt{x^3} \right]_0^4 - \frac{1}{12} \left[x^3 \right]_0^4$$

$$A = \frac{4 \cdot 8}{3} - \frac{1 \cdot 64}{12} = \frac{128 - 64}{12} = \frac{64}{12} = \frac{16}{3} \quad (\text{m}^2)$$

Insättning av värdena på A och $M_x (= 48/5 \text{ m}^3)$ i formel [3] ger

$$y_0 = \frac{3 \cdot 48}{16 \cdot 5} = 9/5 = 1,8 \text{ m}$$

Eftersom $M_y = M_x$ så blir $x_0 = y_0$ och tyngdpunkten får koordinatangivelsen (1,8;1,8).

2.12.2. Moment och tyngdpunkter för volymer och massor

Genom att ta volymsmomentet för en volym, V , kring ett plan, t ex xz -planet, får man y -koordinaten, y_V , för volymens tyngdpunkt

$$y_V \cdot V = \int_V y \cdot dV \quad 2.76$$

$$y_V = \frac{1}{V} \int_V y \cdot dV \quad 2.77$$

En kropps masscentrum bestäms på liknande sätt

$$y_m \cdot m = \int_m y \cdot dm \quad 2.78$$

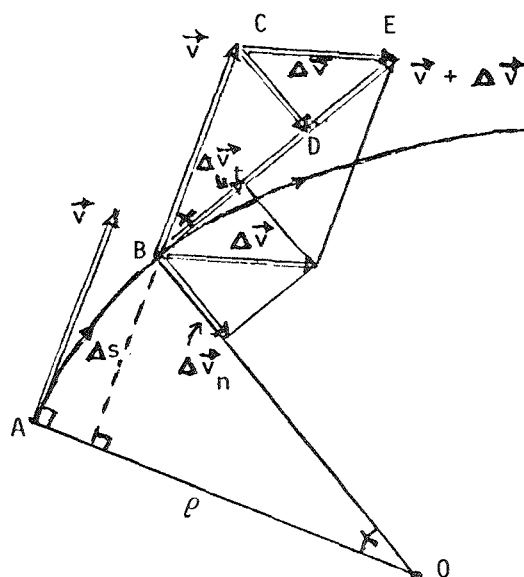
$$y_m = \frac{1}{m} \int_m y \cdot dm \quad 2.79$$

där dm är ett masselement och m är kroppens totala massa.

2.12.3. Normalacceleration och tangentialacceleration

Vid varje kroklinjig rörelse är hastigheten alltid riktad i bantangentens riktning; accelerationen däremot är riktad från bankurvans konkava sida.

För att bevisa riktigheten av det sistnämnda påståendet uppdelar vi accelerationen i två komponenter (komposanter), av vilka den ena går i normalens riktning, den andra i tangentens riktning.



Figur 2.28

Såsom visas i figur 2.28 antages en rörlig punkt befinna sig i A vid tiden t och då ha hastigheten \vec{v} . Vid tiden $t + \Delta t$ har den kommit till B och har hastigheten $\vec{v} + \Delta\vec{v}$. Hastigheten vid B är resultant av hastigheten vid A och av den vektoriella hastighetsändringen, $\Delta\vec{v}$.

Flyttas vektorn \vec{v} till B och drar man en linje från \vec{v} :s ändpunkt till ändpunkten E på vektorn $\vec{v} + \Delta\vec{v}$, så anger sträckan CE den vektoriella hastighetsändringen $\Delta\vec{v}$. Denna uppdelas i en normal komponent CD och en tangentiell komponent DE.

Enligt definitionen på acceleration blir då normalaccelerationen, a_n ,

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{CD}{\Delta t} \quad 2.80$$

För bestämning av värdet på CD dras i punkterna A och B normaler till kurvan. Dessa normaler skär varandra i O, vilken punkt blir krökningscentrum för kurvdelen AB.

Bågen AB kan approximeras med kordan AB och figuren ABO således betraktas som en likbent triangel. Även triangeln BCD kan utan större fel betraktas såsom varande likbent. Av figuren framgår att $\angle CBD = \angle AOB$, varför de båda triangelarna under de givna förutsättningarna är likformiga.

Då fås

$$\frac{CD}{|\vec{v}|} = \frac{\Delta s}{\rho} \quad \text{eller} \quad CD = \frac{v \cdot \Delta s}{\rho}$$

Insättes värdet på CD i uttrycket på a_n i ekvation 2.80 erhålles

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v \cdot \Delta s}{\rho \cdot \Delta t} = \frac{v}{\rho} \frac{ds}{dt} = \frac{v^2}{\rho}$$

som ger

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \quad 2.81$$

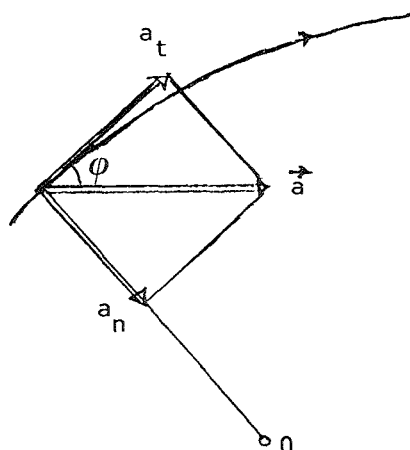
DE är enligt figur 2.28 lika med den skalära hastighetsändringen Δv . För tangentialaccelerationen, a_t , gäller då

$$a_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{DE}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

eller

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} \quad 2.82$$

Av ekvation 2.81 framgår, att a_n alltid är > 0 . a_t kan däremot vara positiv, noll eller negativ beroende på om hastigheten ökar, är konstant eller minskar.



Figur 2.29

Såsom framgår av figur 2.29 är den resulterande accelerationen alltid skild från noll och verkande i en riktning mellan 0° och 180° .

Sammanfattas a_n och a_t fås den resulterande accelerationen

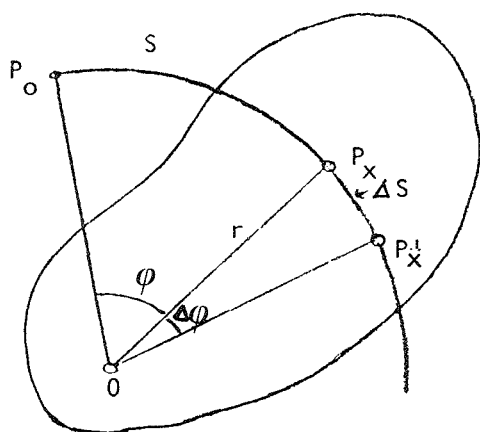
$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} \quad 2.83$$

vars riktning bestäms av uttrycket

$$\tan \varphi = \frac{a_n}{a_t} \quad 2.84$$

2.12.4. Rotationsrörelse

Som ett specialfall av kroklinjig rörelse kan man beteckna cirkulationsrörelsen, dvs den rörelse vid vilken den betraktade punkten beskriver en cirkelformig bana. Ett specialfall av detta specialfall är rotationsrörelsen, vilken innebär att samtliga punkter i ett system av fast förenade punkter, t ex i en stel kropp, rör sig i cirklar med olika radier, men så, att alla cirkulärarnas medelpunkter ligger på en rät linje, rotationsaxeln (vridningsaxeln).



Vinkelhastighet: I figur 2.30 visas olika lägen av en godtycklig punkt hos en kropp som utför rotationsrörelse kring en axel vinkelrät mot pappereets plan genom O. Punkten kommer härvid att röra sig på en cirkel med medelpunkt i O och med $OP = r$ som radie. Under ett tidsintervall Δt har punkten förflyttats från P_x till P'_x och radien OP samtidigt vridit sig kring O.

Figur 2.30

Om man med vinkelhastighet förstår gränsvärdet för kvoten

$$\frac{\text{Vinkelväg i radianer}}{\text{Tidsenhet}}$$

och betecknar vinkelhastigheten med ω och vinkelvägen med φ fås

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} \quad 2.85$$

Vinkelhastigheten är alltså första derivatan av vinkelvägen med avseende på tiden.

Vinkelhastighetens dimension och enhetsbeteckning:

$$[\omega] = \left[\frac{\text{radianer}}{\text{tid}} \right] = \left[\frac{\text{L}}{\text{T}} \right] = \left[\frac{1}{\text{T}} \right] = [\text{T}^{-1}]$$

Vinkelhastighetens dimension är alltså $[\text{T}^{-1}]$. Dess enhetsbeteckning är rad/s.

Rotationsfrekvensen (varvtalet) anges (enligt SI) i varv per sekund och betecknas med n samt har dimensionen $[\text{T}^{-1}]$ och enhetsbeteckningen r/s. Sambandet mellan vinkelhastighet och varvtal är

$$\omega = 2\pi \cdot n \quad 2.86$$

Vinkelacceleration. Med vinkelacceleration förstås förändringen i vinkelhastighet per tidsenhet. Om denna betecknas med α fås

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{\omega \cdot d\omega}{d\varphi} \quad 2.87$$

Vinkelaccelerationen är första derivatan av vinkelhastigheten och andra derivatan av vinkelvägen, i båda fallen med avseende på tiden.

Vinkelaccelerationens dimension och enhetsbeteckning:

$$[\alpha] = \left[\frac{1}{T} \right] = \left[\frac{1}{T^2} \right] = [T^{-2}]$$

Vinkelaccelerationens dimension är alltså $[T^{-2}]$. Dess enhetsbeteckning är rad/s^2 .

Samband mellan rotationsrörelsen och rörelsen i banan

Punkten i figur 2.30 befinner sig vid tiden $t = 0$ i P_0 och vid en godtycklig tidpunkt, $t = x$, i P_x . Vägen i banan = cirkelbågen från P_0 till $P_x = s$ motsvaras då av vinkelvägen φ . Mellan s och φ gäller sambandet

$$s = r\varphi \quad 2.88$$

Eftersom s och φ är funktioner av tiden t och r en konstant för en bestämd punkt, fås genom derivering med avseende på t

$$\frac{ds}{dt} = r \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{och} \quad \frac{d^2s}{dt^2} = r \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$\text{Eftersom} \quad \frac{ds}{dt} = v \quad \text{och} \quad \frac{d^2s}{dt^2} = a_t$$

följer ur ekvationerna 2.85 och 2.87 att

$$v = \omega r \quad 2.89$$

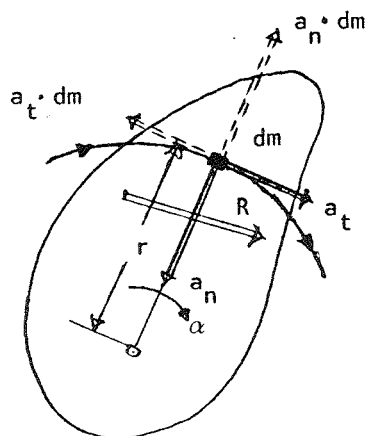
$$a_t = \alpha r \quad 2.90$$

Hastigheten i banan, v , även kallad periferihastigheten, får man alltså genom att multiplicera vinkelhastigheten, ω (i rad/s), med radien, r , medan tangentialaccelerationen a_t , erhålles genom multiplicering av vinkelaccelerationen, α (i rad/s^2), med radien, r .

Enligt ekvation 2.81 på s. 2:70 har punkten förutom en tangentialacceleration också en normalacceleration, $a_n = v^2/r$. Insättes $v = r\omega$ i uttrycket för a_n fås

$$a_n = \frac{(\omega \cdot r)^2}{r} = \omega^2 \cdot r \quad 2.91$$

Roterar en kropp (se fig. 2.31) kring en fast axel kommer alla smådelar hos kroppen att beskriva cirklar kring en medelpunkt belägen på axeln.



Figur 2.31

Studerar vi en sådan liten del och antar, att dennas massa är dm och att avståndet från rotationsaxeln är r , så får, enligt det föregående, delen generellt två accelerationer; en normalacceleration, a_n , och en tangentialacceleration, a_t .

Enligt ekvation 2.90 är $a_t = \alpha r$, där α är kroppens momentana vinkelacceleration.

De på kroppen verkande yttre krafterna kan sammansättas till en resultant, R , vilken med avseende på rotationsaxeln har momentet M .

I enlighet med d'Alemberts princip kan man överföra problemet till ett statiskt problem genom att tillfoga de båda tröghetskrafterna $a_t \cdot dm$ och $a_n \cdot dm$. Eftersom momentarmen för kraften $a_n \cdot dm$ är lika med noll, är emellertid det moment som kraften genererar också lika med noll. Momentekvationen med avseende på rotationsaxeln kan då skrivas

$$M = \int a_t \cdot dm \cdot r$$

Men emedan

$$a_t = \alpha r$$

enligt ekvation 2.90, fås

$$M = \int \alpha r^2 \cdot dm$$

eller då vinkelaccelerationen är densamma för alla vinkelelement

$$M = \alpha \int r^2 \cdot dm \quad 2.92$$

Eftersom integraluttrycket är oberoende av de yttre krafterna liksom av kroppens rörelsetillstånd och endast är avhängigt massfördelningen, kan man en gång för alla beräkna denna integral för ofta förekommande kroppar. Momentet, M , kallas accelerationsmoment.

$\int r^2 dm$ benämnes masströghetsmoment eller enbart tröghetsmoment. Storheten betecknas vanligen med J . De närbesläktade yt- och linjetröghetsmomenten har mestadels storhetsbeteckningen I (se nedan).

Accelerationslagen vid rotationsrörelse kan då skrivas analogt med accelerationslagen för partikelns rörelse

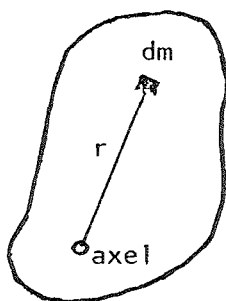
$$M = \alpha J \quad 2.93$$

2.12.5. Tröghetsmoment

Med en kropps (mass)tröghetsmoment förstås summan av produkterna av varje i kroppen ingående masselement och kvadraten på dess avstånd till en axel.

Enligt beteckningarna i figur 2.32 blir det matematiska uttrycket för tröghetsmomentet

$$J = \int r^2 \cdot dm \quad 2.94$$



Figur 2.32

I fråga om homogena kroppar samt fysiska linjer och ytor är smådelarnas tyngder (vikter) proportionella mot delarnas volymer, längder respektive ytor. I ekvation 2.94 kan därför masselementet dm alltid utbytas mot volyms-, linje- eller ytelement.

Vi kallar massan m , volymen V , ytan A och linjelängden L samt elementets avstånd från axeln för y . Tröghetsmomentet med avseende på en godtycklig axel kan i respektive fall tecknas

$$J_i(m) = \int y^2 \cdot dm \quad 2.95$$

$$J_i(V) = \int y^2 \cdot dV \quad 2.96$$

$$I_i(A) = \int y^2 \cdot dA \quad 2.97$$

$$I_i(L) = \int y^2 \cdot dL \quad 2.98$$

Inom hydrostatiken har vi anledning att främst uppehålla oss vid ekvation 2.97, vilken i ord kan uttryckas: Med en ytas tröghetsmoment förstås summan av de produkter som bildas när varje i ytan ingående element multipliceras med kvadraten på dettas avstånd till en vridningsaxel (här betecknad i). Tröghetsmomentet $I_i(A)$ har dimensionen $[L^4]$.

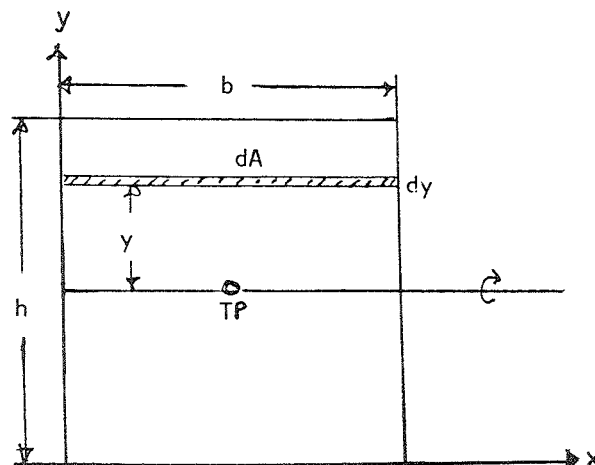
Illustrativt exempel 2.18 (s. 2:75 - 2:80)

Sök tröghetsmomentet, $I_{o,j}$, med avseende på en x -axelparallell axel genom följande ytors tyngdpunkter (ytorna (a), (b), (d) och (e) förutsättes vara placerade med en rät sida längs abscissan; ytan (c) tänkes lagd så att x -axeln är tangent)

- (a) rektangelytan ($I_{o,j} = I_{o,r}$)
- (b) triangelytan ($I_{o,j} = I_{o,tr}$)
- (c) cirkelytan ($I_{o,j} = I_{o,c}$)
- (d) halvcirkelytan ($I_{o,j} = I_{o,hc}$)
- (e) kvartscirkelytan ($I_{o,j} = I_{o,kc}$)

Lösning:

(a) REKTANGELYTAN



Vi har enligt figuren på föregående sida en rektangel med basen b och höjden h .

För tröghetsmomentet för en axel genom tyngdpunkten gäller då i analogi med ekvation 2.97

$$I_i(A) = I_o = \int y^2 \cdot dA \quad (2.97)$$

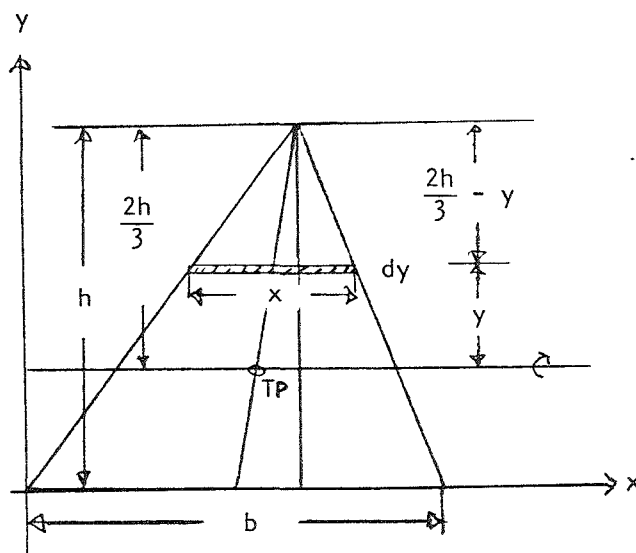
För $I_o = I_{o,r}$ och $dA = b \cdot dy$

fås
$$I_{o,r} = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \cdot dy = \frac{b}{3} \left[y^3 \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{b}{3} \left(\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8} \right) = \frac{bh^3}{12} \quad (m^4)$$

Tröghetsmomentet med avseende på en x-axelparallell axel genom en rektangelytas tyngdpunkt är alltså

$$\frac{bh^3}{12} \quad (m^4)$$

(b) TRIANGELYTAN



I analogi med rektangelytan har vi relationen

$$I_{o,tr} = \int y^2 \cdot dA \quad [1]$$

Likformighet ger enligt figuren ovan

$$\frac{x}{b} = \frac{\frac{2h}{3} - y}{h} = \frac{2h - 3y}{3h}$$

$$x = \frac{b \cdot (2h - 3y)}{3h}$$

Vi får alltså att

$$dA = x \cdot dy = \frac{b \cdot (2h - 3y)}{3h} dy$$

Insättning i formel [1] ger då

$$I_{O, tr} = \int y^2 \cdot x \cdot dy = \frac{b}{3h} \int y^2 \cdot (2h - 3y) \cdot dy$$

$$I_{O, tr} = \frac{2b \cdot h}{3h} \int y^2 \cdot dy - \frac{3b}{3h} \int y^3 \cdot dy = \frac{2b}{3} \left[\frac{y^3}{3} \right] - \frac{3b}{3h} \left[\frac{y^4}{4} \right]$$

Integrering mellan gränserna $-h/3$ och $2h/3$ ger

$$I_{O, tr} = \frac{2b}{9} \left[y^3 \right]_{-h/3}^{2h/3} - \frac{b}{4h} \left[y^4 \right]_{-h/3}^{2h/3}$$

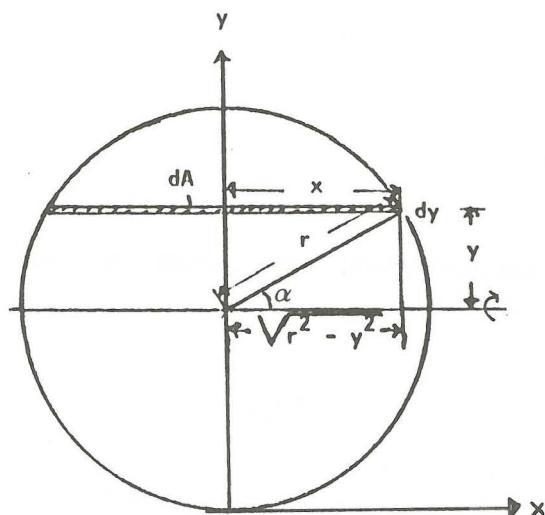
$$I_{O, tr} = \frac{2b}{9} \left(\frac{8h^3}{27} + \frac{h^3}{27} \right) - \frac{b}{4h} \left(\frac{16h^4}{81} - \frac{h^4}{81} \right) =$$

$$= \frac{2b}{9} \cdot \frac{h^3}{3} - \frac{b}{4h} \cdot \frac{5h^4}{27} = \frac{bh^3}{27} \left(2 - \frac{5}{4} \right) = \frac{bh^3}{36} \quad (m^4)$$

Tröghetsmomentet med avseende på en x-axelparallell axel genom en triangelns tyngdpunkt är alltså

$$\frac{bh^3}{36} \quad (m^4)$$

(c) CIRKELYTAN



Vi har som förut relationen

$$I_{O, c} = \int y^2 \cdot dA \quad [1]$$

$$dA = 2x \cdot dy = 2 \sqrt{r^2 - y^2} \cdot dy$$

Övergång till trigonometrisk substitution ger enligt figuren

$$y = r \cdot \sin \alpha; \quad dy = r \cdot \cos(\alpha) d\alpha$$

$$\sqrt{r^2 - y^2} = r \cdot \cos \alpha$$

Insättning i formel [1] ger då

$$\begin{aligned} I_{O,c} &= 2 \int r^2 \cdot \sin(\alpha) \cdot r \cdot \cos(\alpha) \cdot r \cdot \cos(\alpha) \cdot d\alpha = \\ &= 2 \cdot r^4 \int \sin^2(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha) \cdot d\alpha \end{aligned}$$

Eftersom $\sin^2 \alpha = (1 - \cos(2\alpha))/2$ och $\cos^2 \alpha = (1 + \cos(2\alpha))/2$

får vi (med utnyttjande av konjugatsatsen)

$$I_{O,c} = \frac{r^4}{2} \int (1 - \cos^2(2\alpha)) \cdot d\alpha$$

eller (med hjälp av den "trigonometriska ettan")

$$I_{O,c} = \frac{r^4}{2} \int \sin^2(2\alpha) \cdot d\alpha$$

Ny övergång till dubbel (fördubblad) vinkel, dvs till 4α , ger

$$I_{O,c} = \frac{r^4}{4} \int (1 - \cos(4\alpha)) \cdot d\alpha$$

Vi får alltså

$$I_{O,c} = \frac{r^4}{4} \int d\alpha - \frac{r^4}{4} \int \cos(4\alpha) \cdot d\alpha ,$$

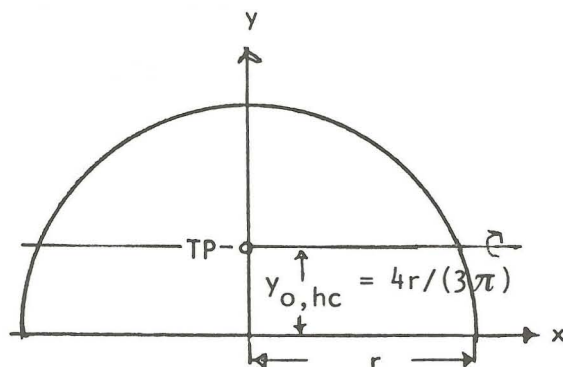
vilket uttryck vi integrerar mellan integreringsgränserna $-\pi/2$ och $\pi/2$ (Integralen av $\cos(ax)$ är lika med $1/a \sin(ax)$), och får

$$\begin{aligned} I_{O,c} &= \frac{r^4}{4} \left[\alpha \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} - \frac{r^4}{16} \left[\sin(4\alpha) \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ I_{O,c} &= \frac{r^4}{4} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) - \frac{r^4}{16} (\sin(2\pi) + \sin(2\pi)) \\ I_{O,c} &= \frac{\pi \cdot r^4}{4} = \frac{\pi \cdot d^4}{64} \quad (m^4) \end{aligned}$$

Tröghetsmomentet med avseende på en x-axelparallell axel genom en cirkel-
ytas tyngdpunkt är alltså

$$\frac{\pi \cdot r^4}{4} \quad \text{eller} \quad \frac{\pi \cdot d^4}{64} \quad (m^4)$$

För en ellipsyta gäller att motsvarande tröghetsmoment är $\pi a^3 b / 64$ med a och b betecknande längden av lillaxeln respektive längden av storaxeln.

(d) HALVCIRKELYTAN

För ytan av en halvcirkel med en viss radie, r , gäller att dess tröghetsmoment, $I_{x, hc}$, med avseende på en axel sammanfallande med halvcirkelns raka sida är hälften av yttröghetsmomentet, $I_{o, c}$, med avseende på en x-axelparallell axel genom tyngdpunkten av en cirkel med lika stor radie som halvcirkelns. $I_{x, hc}$ är alltså $\pi r^4/8$. Vidare gäller att halvcirkelns area, A_{hc} , är $\pi r^2/2$ och att y-koordinaten, $y_{o, hc}$, för dess tyngdpunkt är $4r/(3\pi)$. Jfr s. 2:63.

Parallellförflyttningsekvationen, ekvation 2.31 på s. 2:20,

$$I_x = I_o + y_o^2 \cdot A \quad (2.31)$$

kan i här aktuellt fall skrivas

$$\begin{aligned} I_{o, hc} &= I_{x, hc} - y_{o, hc}^2 \cdot A_{hc} = \\ &= \frac{\pi \cdot r^4}{8} - \frac{16 \cdot r^2}{9\pi^2} \cdot \frac{\pi \cdot r^2}{2} = \frac{\pi \cdot r^4}{8} - \frac{8 r^4}{9\pi} \\ I_{o, hc} &= \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right) \cdot r^4 \approx 0,1098 \cdot r^4 \approx 0,00686 \cdot d^4 \quad (m^4) \end{aligned}$$

Tröghetsmomentet med avseende på en x-axelparallell axel genom en halvcirkelytas tyngdpunkt är alltså

$$0,1098 \cdot r^4 \quad \text{eller} \quad 0,00686 \cdot d^4 \quad (m^4)$$

Tröghetsmomentet, $I_{o, ell, b}$, för en x-axelparallell axel genom tyngdpunkten av en med storaxeln utefter abskissan belägen halvellipsyta kan tecknas

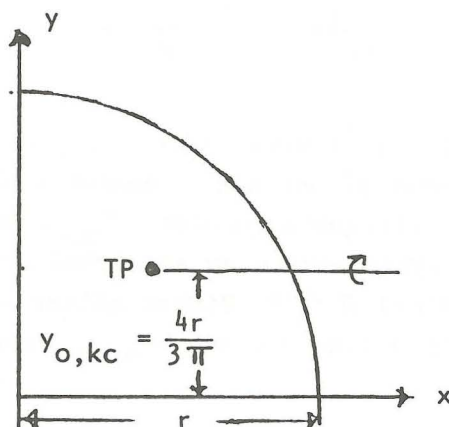
$$I_{o, ell, b} = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right) \frac{a^3 \cdot b}{16} \approx 0,00686 \cdot a^3 \cdot b \quad (m^4)$$

där a och b representerar längden av lillaxeln respektive storaxeln.

Tröghetsmomentet, $I_{o,ell,a}$, för en x-axelparallell axel genom tyngdpunkten av en med lillaxeln utefter abskissan belägen halvelliptyta är

$$I_{o,ell,a} \approx 0,00686 \cdot a \cdot b^3 \quad (m^4)$$

(e) KVARTSCIRKELYTAN



För ytan av en kvartscirkel med en viss radie, r , gäller att dess tröghetsmoment, $I_{x,kc}$, med avseende på en axel sammanfallande med någon av kvartscirkelns raka sidor är fjärdedelen av yttröghetsmomentet, $I_{o,c}$, med avseende på en x-axelparallell axel genom tyngdpunkten av en cirkel med lika stor radie som kvartscirkelns. $I_{x,kc}$ är alltså $\pi r^4/16$. Vidare gäller att kvartscirkelns area, A_{kc} , är $\pi r^2/4$ och att y-koordinaten, $y_{o,kc}$, för dess tyngdpunkt är $4r/(3\pi)$.

Parallellförflyttningsekvationen, ekvation 2.31 på s. 2:20, kan här skrivas:

$$\begin{aligned} I_{o,kc} &= I_{x,kc} - y_{o,kc}^2 A_{kc} = \\ &= \frac{\pi \cdot r^4}{16} - \frac{16 \cdot r^2}{9 \pi^2} \frac{\pi \cdot r^2}{4} = \frac{\pi \cdot r^4}{16} - \frac{4 \cdot r^4}{9 \pi} \\ I_{o,kc} &= \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9 \pi} \right) \cdot r^4 \approx 0,0549 \cdot r^4 \quad (m^4) \end{aligned}$$

Tröghetsmomentet med avseende på en x-axelparallell axel genom kvartscirkelytans tyngdpunkt är alltså

$$0,0549 \cdot r^4 \quad (m^4)$$